

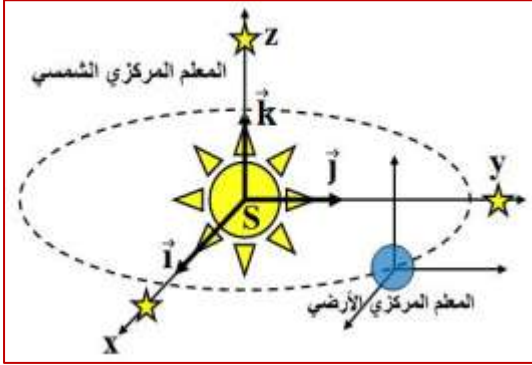
الأقمار الاصطناعية والكواكب

الدرس الثالث عشر

Satellites artificiels et planètes

I. القوانين الثلاثة لكيبلر (KEPLER).

1. المرجع المركزي الشمسي:



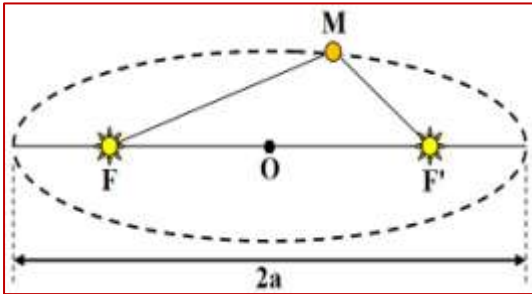
المرجع المركزي الشمسي يتكون من مركز الشمس و ثلاثة محاور متعامدة و موجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة خلال الزمن ، و يستعمل لدراسة حركة الكواكب و المذنبات حول الشمس و يعتبر مرجعا غاليليا.

2. المرجع المركزي الأرضي:

المرجع المركزي الأرضي يتكون من مركز الأرض و ثلاثة محاور متعامدة و موجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة خلال الزمن ، و يستعمل لدراسة حركة الأجسام التي تدور حول الأرض كالأقمار الاصطناعية.

3. قوانين كيبلر الثلاثة:

أ. القانون الأول لكيبلر (قانون المدارات الإهليلجية):



مسار مركز قصور كوكب في المرجع المركزي الشمسي، عبارة عن إهليلج يشكل مركز الشمس إحدى بؤرتيه.

الإهليلج هو منحنى مستو حيث: $MF+MF'=2a$ مع F و F' بؤرتي الإهليلج و a هو نصف طول الحور الكبير للإهليلج.

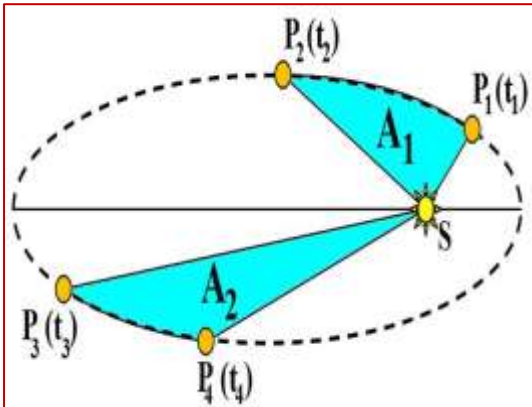
نص القانون

ملاحظة:

الدائرة هي حالة للإهليلج، بحيث تكون البؤرتان متطابقتين و يساوي نصف طول المحور الكبير شعاع الدائرة.

ب. القانون الثاني لكيبلر (قانون المساحات):

نص القانون



تكسح القطعة $[SP_i]$ التي تربط مركز الشمس بمركز الكوكب مساحات متقايصة في مدد زمنية متساوية، بمعنى أن في نفس المدة الزمنية Δt المساحتين A_1 و A_2 متساويتين. أي $A_1 = A_2$

يترجم هذا القانون أن الكوكب يدور حول الشمس بسرعة غير ثابتة كلما اقترب الكوكب من الشمس، كلما زادت سرعته و العكس صحيح.

ملاحظة:

- إذا كان المسار دائريا فإن المساحات المكسوحة و المسافات المقطوعة متقايسة خلال نفس المدة الزمنية، إذن يمكن أن نستنتج أن سرعة الكوكب حول الشمس ثابتة.

ج. القانون الثالث لكيبلر (قانون الأذوار المدارية):

نص القانون

- يتناسب مربع الدور المداري اطرادا مع مكعب نصف طول المحور الكبير للإهليلج بحيث: $T^2 = k.a^3$.
- مع T الدور المداري و هو المدة الزمنية التي يستغرقها الكوكب لإنجاز دورة كاملة حول الشمس.
- و k ثابتة لا تتعلق بالكوكب، بل تتعلق بالجسم الذي تتم حوله الحركة (الشمس).

ملاحظات:

- إذا كان المسار دائريا فإن القانون الثالث لكيبلر يكتب على الشكل التالي: $T^2 = k.r^3$ حيث r شعاع المسار الدائري بالمتر.
- تطبق قوانين كيبلر على الأقمار الطبيعية و الاصطناعية التي تدور حول كوكب ما، في هذه الحالة يشكل مركز الكوكب إحدى بؤرتي الإهليلج.

II. الحركة الدائرية المنتظمة.

سنقتصر في دراسة حركة الأقمار و الكواكب في حالة واحدة حيث يكون المدار دائريا، بمعنى أننا سنطبق القوانين الثلاث لكيبلر في الحالة الخاصة التي يكون فيها المسار دائريا، ومنه يمكن أن نستنتج أن حركة الجسم (كوكب - قمر طبيعي...) ستكون حركة دائرية منتظمة، وأن قانون الأذوار سيكتب كما يلي $T^2 = k.r^3$ بحيث r شعاع المدار الدائري.

1. خصائص الحركة الدائرية المنتظمة:

أ. تعريف:

تعتبر حركة نقطة من جسم، حركة دائرية منتظمة، إذا كان "مسارها دائريا" و أن "قيمة سرعتها اللحظية" ثابتة.

ب. معلمة الموضع:

◆ نمعلم النقطة M عند اللحظة t في معلم ديكارتي

◆ نسمي الأفضول الزاوي المحصورة بين \vec{OM} و \vec{OM}_0

◆ ونرمز لها بالرمز θ ذات الوحدة (rad) ونكتب:

$$\theta = \widehat{(\vec{OM}_0, \vec{OM}(t))}$$

◆ نسمي الأفضول المنحني القوس: $s = \widehat{M_0 M(t)}$

◆ العلاقة التي تجمع الأفضول الزاوي θ بالأفضول المنحني s تكتب كما يلي: $s = r.\theta$ حيث r شعاع المدار الدائري.

ج. متجهة السرعة:

◆ نعرف السرعة الزاوية بأنها المشتقة الأولى للأفضول الزاوي بالنسبة للزمن، بحيث: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = cte$

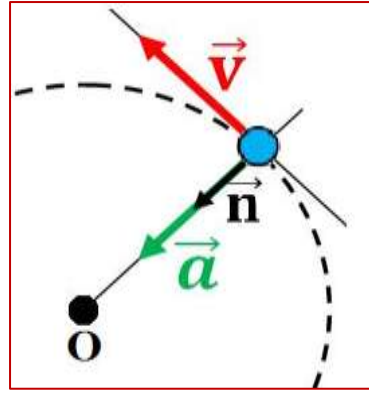
◆ متجهة السرعة اللحظية مماسية للمسار الدائري حيث منحها هو منحى الحركة، و تعرف بالعلاقة التالية:

$$\vec{v} = r.\omega\vec{u}$$

ومنه: $\vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r.\theta)}{dt} = r.\frac{d\theta}{dt} = r.\omega$

حيث θ بالراديان (rad) و ω بالراديان على الثانية (rad/s) و r بالمتر (m).

د. متجهة التسارع:



♦ تكتب متجهة التسارع في أساس فرييني كما يلي:
 $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n = a_T \cdot \vec{u} + a_n \cdot \vec{n}$ وبما أن السرعة ثابتة $v=cte$ فإن

$$a_n = \frac{dv}{dt} = 0$$

♦ أي أن $\vec{a} = \vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$ وبتعويض v بتعبيرها $r \cdot \omega$ نجد أن:

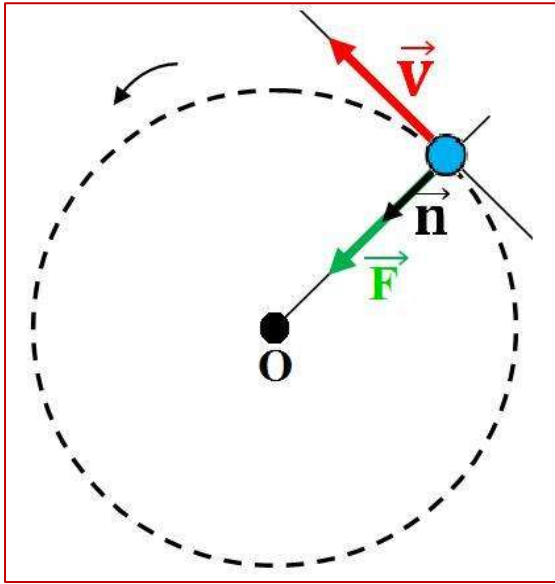
$$\vec{a} = r \cdot \omega^2 \vec{n}$$

♦ مما سبق نخلص إلى أن **متجهة التسارع مركزية إنجاذبية**.
ه. دور الحركة:

الحركة الدائرية المنتظمة ظاهرة دورية و دورها يساوي مدة دورة واحدة بحيث:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

2. شروط الحركة الدائرية المنتظمة:



حسب القانون الثاني لنيوتن، مجموع القوى المطبقة على جسم صلب كتلته m ومركز قصوره G في حركة دائرية منتظمة يحقق

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

لكي تكون حركة مركز القصور G لجسم صلب كتلته m ، دائرية منتظمة شعاعها r وسرعتها v يلزم أن تكون القوة \vec{F} المكافئة لمجموع القوى المطبقة على هذا الجسم:

♦ إنجاذبية مركزية أي منحاهما نحو مركز الدوران.

♦ شدتها تحقق العلاقة $F = m \cdot \frac{v^2}{r}$ لا تتعلق إلا بالشعاع.

III. دراسة الحركة المدارية للكواكب.

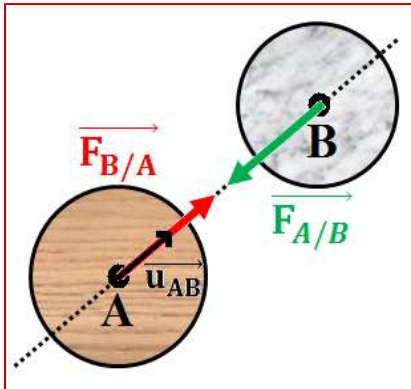
تتم هذه الدراسة في المرجع المركزي الشمسي باعتباره غاليليا، ويفترض ثابتا لنتحقق من كون حركة الكوكب حول الشمس دائرية منتظمة ولنحدد مميزات هذه الحركة.

1. قانون نيوتن للتجاذب الكوني:

يحدث بين جسمين (A) و (B) لهما تماثل كروي كتلتاهما m_A و m_B ، وتفصل بينهما المسافة $r = AB$ ، تجاذب كوني قوته $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ بحيث:

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \cdot \vec{u}_{AB}$$

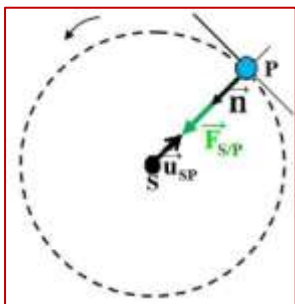
مع $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (SI) قيمتها (ثابتة كافيندش)



2. دراسة حركة كوكب P بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

نعتبر كوكبا كتلته M_p و مركزه P الذي يتطابق مع مركز قصوره، في حركة حول الشمس ذات الكتلة M_s والمركز S.

يخضع الجسمان إلى تأثير بيني تجاذبي بحيث نطبق القانون الثاني على الكوكب فنجد:



$$\vec{a}_P = -G \cdot \frac{M_S}{r^2} \cdot \vec{u}_{SP} \text{ ومنه فإن: } \vec{F}_{S/P} = -G \cdot \frac{M_P \cdot M_S}{r^2} \cdot \vec{u}_{SP} = M_P \cdot \vec{a}_P$$

$$\vec{a}_P = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \cdot \vec{n} \text{ وبما أن: } \vec{n} = -\vec{u}_{SP}$$

إذن التسارع مركزي انجذابي أي أن القوة $\vec{F}_{S/P}$ مركزية انجذابية و بالتالي يتحقق الشرط الأول للحصول على حركة

$$\vec{a}_P = \vec{a}_n = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n} \text{ دائرية منتظمة. وبما أن التسارع مركزي انجذابي أي منظمي فإن:}$$

وهذا معناه أن شدة القوة $\vec{F}_{S/P}$ ثابتة تساوي: $\vec{F}_{S/P} = M_P \cdot \frac{v^2}{r}$ و بالتالي يتحقق الشرط الثاني للحصول على حركة دائرية منتظمة.

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}} \text{ إذن: } G \cdot \frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{r} \text{ سرعتها هي:}$$

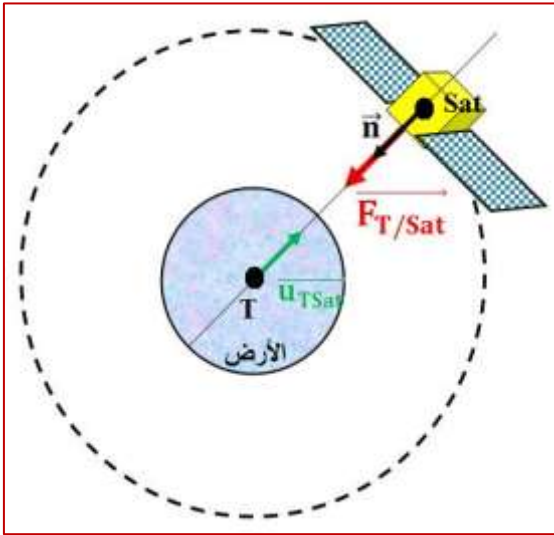
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_S}} \text{ دورها هو: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot r}{v} \text{ بتعويضها فنجد:}$$

ولدينا: $T^2 = \frac{4\pi^2}{M_S} \cdot r^3$ ونضع $k = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$ ومنه نكتب: $T^2 = k \cdot r^3$ وهذا يترجم القانون الثالث لكيبلر.

IV. الحركة المدارية للأقمار الاصطناعية للأرض.

1. مميزات الحركة المدارية للأقمار:

في هذه الدراسة نفترض أن مسار قمر اصطناعي حول الأرض دائري وندرس حركته في المرجع المركزي الأرضي.



أ. التسارع:

يخضع القمر الاصطناعي (Sat) لقوة التجاذب الكوني المطبقة عليه من طرف الأرض وتعبيرها: $\vec{F}_{T/Sat} = -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2} \cdot \vec{u}_{TSat}$

بحيث $r = R + h$ مع R شعاع الأرض و h ارتفاع القمر عن سطح الأرض. وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن في أساس فريني: $\vec{a} = G \cdot \frac{M_T}{(R+h)^2} \cdot \vec{n}$ إذن: $\vec{F}_{T/Sat}$ انجذابية مركزية و منظمها يحقق

العلاقة: $F_{T/Sat} = m \cdot \frac{v^2}{r}$ ومنه **فحركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة.**

ب. السرعة:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R+h)}} \text{ إذن: } G \cdot \frac{M_T}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{(R+h)} \text{ مما سبق نجد أن سرعة القمر الاصطناعي هي:}$$

ج. الدور المداري:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M_T}} \text{ الدور المداري لحركة القمر الاصطناعي هو: } T = \frac{2\pi \cdot (R+h)}{v} \text{ بتعويضها فنجد:}$$

ملاحظات:

- ل تتعلق v و T بكتلة القمر الاصطناعي بل فقط بارتفاعه على سطح الأرض.
- الاستقمار: هو وضع قمرا اصطناعي حول الأرض، ويتم ذلك ب: تحديد الارتفاع الذي سيكون عليه بالنسبة لسطح

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R+h}}$$

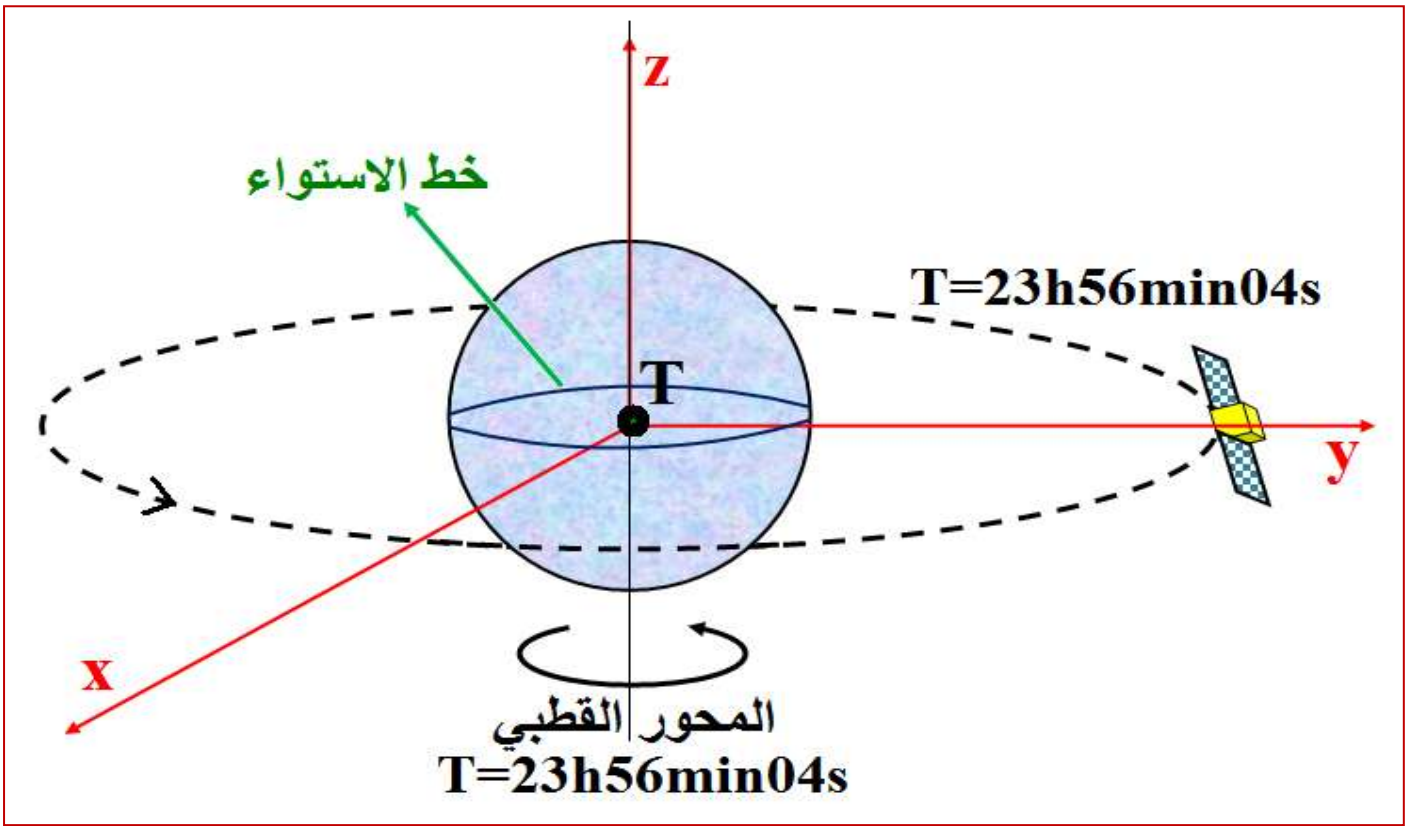
الأرض و كذلك بمنحه سرعة بدئية عمودية على متجهة الموضع وتحقق العلاقة:

2. الأقمار الاصطناعية الساكنة بالنسبة للأرض:

أ. تعريف:

يكون قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض، إذا بدا دوما غير متحرك (في حالة سکون) بالنسبة لملاحظ على سطح الأرض.

بمعنى أدق لقمر اصطناعي ساكن موضع قار بالنسبة لمعلم أرضي بحيث يبقى باستمرار على نفس الخط العمودي لنفس النقطة من سطح الأرض.



ب. شروط السكون:

لكي يظهر قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض ينبغي أن يتحقق ما يلي:

- أن يوجد مداره الدائري في مستوى خط الاستواء للأرض.
- أن يدور في منحنى دوران الأرض حول محورها القطبي.
- أن يساوي دوره المداري T دورة حركة الدوران الخاصة للأرض حول محورها القطبي و الذي يساوي بالتقريب: $T=23h56min04s=84164s$.

ملاحظة:

يمكن قيمة T من تحديد الارتفاع h لهذا القمر الاصطناعي الساكن عن سطح الأرض بحيث نعلم أن:

$$h = 36000 \text{ km} \quad \text{فنجد} \quad h = \left(\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R \quad \text{أي أن} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot M_T}}$$

مع $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ (SI)}$ و $R=6378 \text{ km}$ و $M_T=6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$