السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقـــاق حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : في كل التمرين سنرمز بـ (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+3x+1-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+3x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(-x+4)}{x+1}=\lim_{x\to -1}-x+4=5$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=-1$ و لدينا : $f'(-1)=5$ منه : $(\Delta): y=5(x+1)-3$ أي $(\Delta): y=5x+2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x-3}+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{6x-12}{x-3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{6}{x-3}=-6$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=2$ و لدينا : $f'(2)=-6$ منه : $(\Delta): y=-6(x-2)-4$ أي $(\Delta): y=-6x+8$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+7-9}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}=\frac{1}{3}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ و لدينا : $f'(1)=\frac{1}{3}$ منه : $(\Delta): y=\frac{1}{3}(x-1)+3$ أي $(\Delta): y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=5$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $f'(0)=5$ منه : $(\Delta): y=5(x-0)+0$ أي $(\Delta): y=5x$

$$\left(t=x-\frac{\pi}{2}\right)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\sin(t)\times\frac{\sin(t)}{t}=0\times 1=0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=\frac{\pi}{2}$ و لدينا : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ منه : $(\Delta): y=0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{x-\frac{\pi}{8}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\tan(2x)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{8}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\tan(2x)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{x-\frac{\pi}{8}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{x-\frac{\pi}{8}}==\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}2\ \frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{2x-\frac{\pi}{4}}\times(1+\tan(2x))=2\times 1\times 2=4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=\frac{\pi}{8}$ و لدينا : $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$ منه : $(\Delta): y=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1$ أي : $(\Delta): y=4x+\frac{2-\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x}}=+\infty$ ، إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $(\Delta): x=0$

دراسة قابلية الاشتقاق تعني دراسة النهاية : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ، في حالة كانت هذه النهاية عددا حقيقيا تكون معادلة المماس : $(\Delta):\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

إذا كانت : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ ورغم عدم قابلية الاشتقاق فمنحنى الدالة يقبل مماسا عموديا معادلته : $x=x_0$

تمرين 2 :

1	لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$ إذن الدالة : $f(x)=\sqrt{1+x}$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسة لها في النقطة 0 هي: $h(x)=\frac{1}{2}(x-0)+1=\frac{1}{2}x+1$ منه: $\sqrt{1,0002}=f(0,0002)\approx h(0,0002)\approx\frac{0,0002}{2}+1\approx0,0001+1\approx1,0001$ و : $\sqrt{0,9996}=f(-0,0004)\approx h(-0,0004)\approx\frac{-0,0004}{2}+1\approx-0,0002+1\approx0,9998$
2	لدينا : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x+1}=-1$ إذن الدالة : $f(x)=\frac{1}{1+x}$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسة لها في النقطة 0 هي : $h(x)=-(x-0)+1=-x+1$ منه: $\frac{1}{1,015}=f(0,015)\approx-0,015+1\approx0,985$
3	لدينا : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ إذن الدالة : $f(x)=\sin x$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسة لها في النقطة 0 هي : $h(x)=x$ منه: $\sin(0,02)=f(0,02)\approx0,02$ منه : $\cos0,02=\sqrt{1-\sin^2(0,02)}\approx\sqrt{1-0,0004}\approx\sqrt{0,9996}\approx0,9998$
	ضمنيا في هذا السؤال وحدة القياس هي الراديان لاحظ أننا استعملنا بعض نتائج السؤال الأول في الاستنتاج

تمرين 3 : في كل التمرين سنرمز بـ (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $f'(0)=0$ منه : $(\Delta): y=0$

$$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $f'(0)=\frac{1}{2}$ منه : $(\Delta): y=\frac{1}{2}x$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^3-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}x^2+x-3=-1$

و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}x-2=-1$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-1$ فإن : f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$

و لدينا : $f'(1)=-1$ منه : $(\Delta): y=-(x-1)-3$ أي $(\Delta): y=-x-2$

صورة العدد 1 تم حسابها بالصيغة الأولى لأنها معرفة على مجال يحتوي على العدد 1

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{-x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-1}{x+1}=-1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2x^2+4x+1}{x} = -\infty$$ و

إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

في السنة الثانية بكالوريا دائما يسبق دراسة الاشتقاق في نقطة دراسة اتصالها في هذه النقطة، لكن مفهوم الاتصال لا يدس في هذه السنة، في المثال الأخير رغم أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ إلا أنه لا يوجد مماس عمودي بسبب عدم اتصال الدالة في الصفر.

تمرين 4 :

$f'(x)=\left(-5x^3+7x^2-x\right)'=-15x^2+14x-1$	$f'(x)=\left(-7x^3+13\right)'=-21x^2$
$f'(x)=\left(\sin(x)+3\cos(x)\right)'=\cos(x)-3\sin(x)$	$f'(x)=\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)'=4\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$
$f'(x)=\left(\frac{2x-3}{4x+1}\right)'$ $f'(x)=\frac{(2x-3)'(4x+1)-(2x-3)(4x+1)'}{(4x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{2(4x+1)-4(2x-3)}{(4x+1)^2}=\frac{14}{(4x+1)^2}$	$f'(x)=\left(x\sin(x)\right)'$ $f'(x)=x'\sin(x)+x\left(\sin(x)\right)'=\sin x+x\cos x$
$f'(x)=\left[\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]'$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	$f'(x)=\left(\frac{2x^3+x+1}{x^2+1}\right)'$ $f'(x)=\frac{(6x^2+1)(x^2+1)-2x(2x^3+x+1)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{6x^4+6x^2+x^2+1-4x^4-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{2x^4+5x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$
$f'(x)=\left[(x^2-3)(4x-5)\right]'=2x(4x-5)+4(x^2-3)$ $f'(x)=12x^2-10x-12$	$f'(x)=\left(\frac{3x+2}{5x-1}\right)'=\frac{3(5x-1)-5(3x+2)}{(5x-1)^2}=\frac{-13}{(5x-1)^2}$
$f'(x)=\left(\sqrt{2-3x}\right)'=\frac{(2-3x)'}{2\sqrt{2-3x}}=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$	$f'(x)=\left(-2x\sqrt{x}\right)'=-2\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(x)=-2\frac{3x}{2\sqrt{x}}=-3\sqrt{x}$
$f'(x)=\left((2x+3)^7\right)'=7(2x+3)^6(2x+3)'$ $f'(x)=14(2x+3)^6$	$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'=\frac{(x^2+2x+2)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}$ $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

	$f'(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)'$ $f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{-4x^2+2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}=f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$	$f'(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}\right)'$ $f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2x-\sqrt{x})-\left(2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x+\sqrt{x})}{(2x-\sqrt{x})^2}$
	$f'(x)=\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ $f'(x)=\frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{(1+x)^2}$	$f'(x)=\left(x(x^2+1)^2\right)'=1\times(x^2+1)^2+x(2\times2(x^2+1))$ $f'(x)=x^4+2x^2+1+4x^3+4x$
	$f'(x)=(\sin^2 x+2\cos^2 x)'$ $f'(x)=2\sin x\cos x+2(2\cos x(-\sin x))$ $f'(x)=-3\sin x\cos x$	$f'(x)=\left(\tan 3x+4\sin\frac{x}{2}\right)'$ $f'(x)=3\times\frac{1}{\cos^2 3x}+4\times\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$ $f'(x)=\frac{3}{\cos^2 3x}+2\cos\frac{x}{2}$
	$f'(x)=[(\sin x+\cos x)\sin x]'$ $f'(x)=(\cos x-\sin x)\sin x+(\sin x+\cos x)\cos x$ $f'(x)=2\sin x\cos x-\sin^2 x+\cos^2 x$	$f(x)=\frac{\sin x-1}{\sin x+1}$
	$f'(x)=(\sin x\cos 2x)'$ $f'(x)=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$	$f'(x)=\left(\frac{2+\cos x}{3-\cos x}\right)'$ $f'(x)=\frac{-\sin x(3-\cos x)-\sin x(2+\cos x)}{(3-\cos x)^2}$ $f'(x)=\frac{-5\sin x}{(3-\cos x)^2}$

أحيانا نتجاوز بعض التفاصيل لكونها واضحة أو سبق توضيحها في مثال سابق

للتذكير: $(u+v)'=u'+v'$ ، $(u.v)'=u'v+u.v'$ ، $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$ ، $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، $(u^n)'=n\,u^{n-1}u'$

$$(u(ax+b))'=a\,u'(ax+b)$$