السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقــــاق حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

1) $Df=\{x\in IR\ /\ x+1\neq 0\}=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2)

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$\lim\limits_{x\mapsto-1} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-1}\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-\infty$ (**لأن** : $\lim\limits_{x\mapsto-1} 2x^2+2x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\mapsto-1}(x+1)^2=0^+$)

3)

$$\forall x\in Df\quad f'(x)=\left(\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(4x+2)(x+1)^2-(2x^2+2x-1)\times 2(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)[(4x+2)(x+1)-2(2x^2+2x-1)]}{(x+1)^4}=\frac{4x^2+4x+2x+2-4x^2-4x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+2}{x+1}$$

4) لدينا : $f(0)=-1$ و $f'(0)=4$ إذن المماس في $x_0=0$ هي: $(\Delta):\ y=4x-1$

5) بما أن

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	
$x+1$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$2 \nearrow 3$	$3 \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow 2$	

6) حسب جدول التغيرات فالدالة f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2;3)$

تمرين 2 : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} & ;\ x>1 \\ f(x)=\sqrt{2-x} & ;\ x\leq 1\end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2+1}{2x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

2) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\dfrac{x^2+1}{2x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x<1}}\sqrt{2-x}=1$ ، إذن f تقبل نهاية في 1

3)

$$\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{\frac{x^2+1}{2x}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{\frac{x^2-2x+1}{2x}}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{(x-1)^2}{2x(x-1)}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{x-1}{2x}=0$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{2-x-1}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{1-x}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1}=\frac{-1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق يمين ويسار 1 ، ولدينا : $f'_d(1)=0$ و $f'_g(1)=\frac{-1}{2}$

لكنها غير قابلة للاشتقاق في 1 لأن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

4 معادلة نصفي المماس في النقطة ذات الأفصول 1 : $(\Delta_d):\begin{cases} y=1\\ x\geq 1\end{cases}$ و $(\Delta_g):\begin{cases} y=\frac{-1}{2}(x-1)+1=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}\\ x\leq 1\end{cases}$

5

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=\frac{1}{2}\frac{2x\times x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2} & ;\ x>1\\ f'(x)=\left(\sqrt{2-x}\right)'=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} & ;\ x<1\end{cases}$$

6 بما أن $x>1\Rightarrow x^2-1>0$ فإن $\forall x>1\ \ f'(x)>0$ و لدينا : $\forall x<1\ \ f'(x)<0$ ، إذن:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

تمرين 3 : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1 $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3+3x^2-12x+1=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3=+\infty$ ؛ $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} 2x^3=-\infty$

2 $\forall x\in IR\quad f'(x)=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)$

3 إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدودية : x^2+x-2 ،

$\Delta=1+8=9>0$ إذن هذه الحدودية تقبل جذرين مختلفين هما : $r_1=\frac{-1+3}{2}=1$ و $r_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+		-		+	
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	21	↘	-6	↗	$+\infty$

4 حسب جدول التغيرات فإن f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2;21)$ وقيمة دنوية نسبية في النقطة $B(1;-6)$ ، لكن هذه النقط لا تمثل قيما مطلقة لأن : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=-\infty$

تمرين 4 : لنبين أن : $\forall a>0;\quad 2a+\frac{1}{a^3}\geq 3$ بدراسة الدالة $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ على $]0;+\infty[$ ،

لدينا: $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

و لدينا: $\forall x > 0 \quad f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2}{x^3}\left(x^3 - 1\right) = \dfrac{2}{x^3}(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$

بما أن : $\dfrac{2}{x^3}\left(x^2 + x + 1\right) > 0 \quad \forall x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدانية $x-1$ ، منه :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-		+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

إذن الدالة f تقبل قيمة دنوية مطلقة في النقطة $A(1\,;\,3)$ مما يعني أن : $\forall\, x > 0; \quad f(x) \geq 3$

أو أيضا : $\forall\, a > 0; \quad 2a + \dfrac{1}{a^3} \geq 3$