التعداد

تمارين و حلول

تمرين1

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كما يلي أربعة كرات حمراء 3 منها تحمل الرقم 1 و واحدة تحمل الرقم2 و خمسة كرات خضراء 3 منها تحمل الرقم 2 ، واثنين منها تحمل الرقم1، و كرة واحدة بيضاء تحمل الرقم 3

نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون احلال ثلاث كرات.

1- حدد عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1

2- حدد عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ مع العلم أن العدد a يمثل رقم الكرة الأولى المسحوبة و b يمثل رقم الكرة الثانية و c يمثل الكرة الثالثة.

تمرين 2

من مؤسسة ثانوية تأهلية تحتوي على n شخصا، نريد أن نختار مجلسا مكونا من p شخصا حيث $2 \le p \le n$

1- ما هو عدد المجالس الممكن تكوينها في الحالات التالية:

أ- مجلس يضم المدير و الناظر

ب- مجلس لا يضم المدير و الناظر

ت- مجلس يضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا

2- استنتج أن $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

تمرين3

1) بين بالترجع أن $\sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) استنتج قيمة المجموع : $S = (1\times 2) + (2\times 3) + (3\times 4) + \ldots\ldots + (n(n+1))$

تمرين4

ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \ge 2$. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (x+1)^n$

بعد حساب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين

استنتج المجامع التالية $A = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k \qquad B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k \qquad C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k$

تمرين5

نعتبر صندوقا يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات تحمل الأرقام 1 و2 و3 و4 و5 .

نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- أحسب عدد السحبات المكنة للحصول على3 كرات بيضاء و كرتين حمراويين.

2- أحسب عدد السحبات المكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.
- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

تمرين6

في مكتب جمعية يتكون من 15 عضوا , 6 إناث و 9 ذكور .

نريد أن نختار عشوائيا رئيس و نائبه و كاتب عام و أمين المال.

1- ما هو عدد الإمكانيات الممكنة ؟

2- ما هو عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث؟

تمرين7

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث $cardE = cardF = n$

1- بين أن عدد الأزواج $(X;Y)$ من $\left[P(E)\right]^2$ بحيث $X \cup Y = E$ و $n \geq 2$ هو 3^n

2- أحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر. و استنتج أن

$$C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k\right)^2$$

استنتج أن $\frac{n}{2} C_{2n}^{n} = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2$

تمرين8

أحسب المجاميع التالية

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \quad \text{و} \quad S'_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} C_n^i \quad \text{و} \quad S_{(n;p)} = \sum_{i=0}^{p} C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i}$$

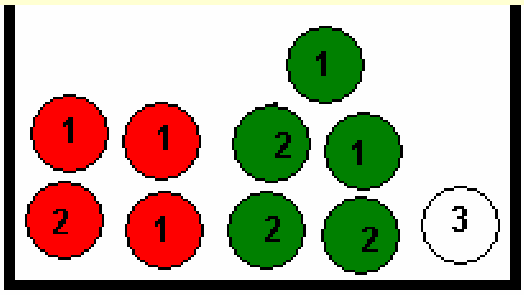
تمرين9

لتكن E مجموعة منتهية حيث $cardE = n \geq 2$

حدد عدد التطبيقات f المعرفة من E نحو E حيث $card\left[f(E)\right] = \frac{n}{2}$

حلول

حل تمرين1



نسحب عشوائيا من الصندوق بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات.

1- نحدد عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1

هذه السحبات ستكون على شكل R_1R_1X أو $\overline{R_1}R_1X$

عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1 هي:

$$A_7^1 . A_3^1 . A_8^1 + A_3^2 . A_8^1 = 216$$

2- نحدد عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ مع العلم أن العدد a يمثل رقم الكرة الأولى المسحوبة و b يمثل رقم الكرة الثانية و c يمثل الكرة الثالثة.

$ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow b^2 - 4ac \succ 0$ أي $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \succ ac$

إذا كان $b = 1$ فان $\frac{1}{4} \succ ac$ و هذا غير ممكن لأن $a \geq 1$ و $c \geq 1$

إذا كان $b = 2$ فان $1 \succ ac$ غير ممكن

إذا كان $b = 3$ فان $\frac{9}{4} \succ ac$

ومنه $(a;b;c) = (1;3;1)$ أو $(a;b;c) = (1;3;2)$ أو $(a;b;c) = (2;3;1)$

إذن عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$ هي:

$$A_5^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1 + A_4^1 \cdot A_1^1 \cdot A_5^1 + A_5^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1 = 60$$

حل تمرين2

من مؤسسة ثانوية تأهلية تحتوي على n شخصا، نريد أن نختار مجلسا مكونا من p شخصا

حيث $2 \leq p \leq n$

-1

a. عدد المجالس الممكنة التي تضم المدير و الناظر هو C_{n-2}^{p-2}

b. عدد المجالس الممكنة التي لا تضم المدير و الناظر هو C_{n-2}^{p}

c. عدد المجالس الممكنة التي تضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا هو

$$C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} = 2C_{n-2}^{p-1}$$

-2 نستنتج أن $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

عدد المجالس المكونة من p شخص من بين n شخص هو C_n^p

لدينا المجالس المكونة من p شخص من بين n شخص هو مجموع المجالس الممكنة التي تضم المدير و الناظر و المجالس الممكنة التي لا تضم المدير و الناظر و المجالس الممكنة التي تضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا.

إذن $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

حل تمرين3

1) نبين بالترجع أن $\sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$ لدينا $C_{1+2}^3 = C_3^3 = 1$ و $\sum_{p=1}^{p=1} C_{p+1}^2 = C_2^2 = 1$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=1$

لنفترض أن $\sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$ لنبين أن $\sum_{p=1}^{p=n+1} C_{p+1}^2 = C_{n+3}^3$

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} C_{p+1}^2 = C_{n+1+1}^2 + \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^3$$

إذن $\sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) نستنتج قيمة المجموع : $S = (1\times 2) + (2\times 3) + (3\times 4) + \dots + (n(n+1))$

لدينا $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3$

أي $\dfrac{(1\times 2) + (2\times 3) + (3\times 4) + \dots + (n(n+1))}{2} = C_{n+2}^3$

إذن $S = 2C_{n+2}^3 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

حل تمرين4

ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (x+1)^n$

بعد حساب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين

نستنتج المجامع التالية $A=\sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k$ $\quad B=\sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k$ $\quad C=\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k$

لدينا $f(x)=(x+1)^n$ ومنه $f'(x)=n(x+1)^{n-1}$

لدينا $f(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ ومنه $(f(x))'=\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)'=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$

ومنه $n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$ بوضع $x=1$ فان $n2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k=A$

$$B=\sum_{k=0}^{k=n}(k+1)C_n^k=n+\sum_{k=1}^{k=n}kC_n^k+\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k=n+n2^{n-1}+2^n$$

$$C=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)C_n^k=2n+2\sum_{k=1}^{k=n}kC_n^k+\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k=2n+n2^n+2^n$$

حل تمرين5

صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات

تحمل الأرقام 1 و2 و3 و4 و5 . نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- نحسب عدد السحبات المكنة للحصول على3 كرات بيضاء و كرتين حمراويين.

عدد هذه السحبات هو $C_5^3 A_5^3 A_5^2=\frac{60}{3!}\times 60\times 20=12000$

2- نحسب عدد السحبات المكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.
- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

عدد هذه السحبات هو $C_5^1 A_2^1 A_4^4+C_5^1 A_1^1 C_4^3 A_4^3 A_8^1=240+160=400$

حل تمرين6

1- عدد الإمكانيات الممكنة هو $A_{15}^3=15\times 14\times 13=.....$

2- عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث هو $A_9^4+A_9^2\times A_6^2$

حل تمرين7

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث $cardE=cardF=n$

3- نبين أن عدد الأزواج $(X;Y)$ من $\left[P(E)\right]^2$ بحيث $X\cup Y=E$ و $n\geq 2$ هو 3^n

نضع $cardX=p$ بما أن $X\cup Y=E$ فان $Y=\overline{X}\cup A$ حيث $A\in P(X)$

ومنه عدد المجموعات الجزئية Y حيث $X\cup Y=E$ هو عدد عناصر $P(X)$ أي 2^p

و بما أن عدد أجزاء E التي رئيسها p هو C_n^p فان عدد الأزواج $(X;Y)$ حيث $cardX=p$ هو $C_n^p 2^P$

و حيث أن $p\in\{0;1;2......;n\}$ فان عدد الأزواج $(X;Y)$ حيث $X\cup Y=E$ هو

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p 2^p=(1+2)^n=3^n$$

4- نحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء $E\cup F$ المكونة من n عنصر. و نستنتج أن

$$C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{k=n}\left(C_n^k\right)^2$$

*- بما أن $card(E\cup F)=2n$ فان عدد أجزاء $E\cup F$ المكونة من n عنصر هو C_{2n}^n

*- كل جزء من $E\cup F$ يكون مكون من k عنصر من E و $n-k$ عنصر من F حيث

$k\in\{0;1;2;....;n\}$

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من k عنصر من E هو C_n^k

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من $n-k$ عنصر من F هو $C_n^{n-k}=C_n^k$

عدد أجزاء $E\cup F$ المكونة من n عنصر يحتوي على k عنصر من E و $n-k$ عنصر من F

هو $C_n^k\times C_n^k=\left(C_n^k\right)^2$ حيث $k\in\{0;1;2;....;n\}$

إذن عدد أجزاء $E\cup F$ المكونة من n هو $\sum_{k=0}^{k=n}\left(C_n^k\right)^2$

ومنه نستنتج أن $C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{k=n}\left(C_n^k\right)^2$

* نستنتج أن $\frac{n}{2}C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{k=n}k\left(C_n^k\right)^2$

نضع $S=\sum_{k=0}^{k=n}k\left(C_n^k\right)^2$

$$S=0.\left(C_n^0\right)^2+1.\left(C_n^1\right)^2+.........+(n-1)\left(C_n^{n-1}\right)^2+n\left(C_n^n\right)^2$$

$$S=n.\left(C_n^n\right)^2+(n-1).\left(C_n^{n-1}\right)^2+.......+1.\left(C_n^1\right)^2+0.\left(C_n^0\right)^2$$

$C_n^{n-k}=C_n^k$ لأن $S=n.\left(C_n^0\right)^2+(n-1).\left(C_n^1\right)^2+.......+1.\left(C_n^{n-1}\right)^2+0.\left(C_n^n\right)^2$

$$2S=n.\left(C_n^0\right)^2+n.\left(C_n^1\right)^2+.......+n.\left(C_n^{n-1}\right)^2+n.\left(C_n^n\right)^2$$

$$2S=n\left(\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+.......+\left(C_n^{n-1}\right)^2+\left(C_n^n\right)^2\right)=nC_{2n}^n$$

إذن $\frac{n}{2}C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{k=n}k\left(C_n^k\right)^2$

حل تمرين8

نحسب المجاميع التالية $S_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i$ و $S_n'=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}C_n^i$ و $S_{(n;p)}=\sum_{i=0}^{p}C_n^i\cdot C_{n-i}^{p-i}$

* نعلم أن $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^ib^{n-i}$

نضع $a=-1$ و $b=1$ ومنه $S_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i=0$

* لدينا $\frac{1}{i+1}C_n^i=\frac{1}{i+1}\times\frac{n!}{(n-i)!i!}=\frac{n!}{(n-i)!(i+1)!}=\frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{i+1}$

ومنه

$$S_n'=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}C_n^i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}C_{n+1}^{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}C_{n+1}^i$$

$$S_n'=\frac{1}{n+1}\left(-C_{n+1}^0+\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\right)$$

و حيث أن $\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^{i} = 2^{n+1}$ فان $S'_n = \frac{1}{n+1}\left(-1+2^{n+1}\right)$

* لدينا $C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \times \frac{(n-i)!}{(n-i-p+i)!(p-i)!} = \frac{n!}{i!} \times \frac{1}{(n-p)!(p-i)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{i!(p-i)!}$

أي أن $C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_n^p C_p^i$

وبالتالي $S_{(n;p)} = \sum_{i=0}^{p} C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} = \sum_{i=0}^{p} C_n^p C_p^i = C_n^p \sum_{i=0}^{p} C_p^i = 2^p C_n^p = 2^p \times \frac{n!}{(n-p)!p!}$

حل تمرين9

لتكن E مجموعة منتهية حيث $cardE = n \geq 2$

نحدد عدد التطبيقات f المعرفة من E نحو E حيث $card\left[f(E)\right] = \frac{n}{2}$ (n زوجي)

نعتبر $f(E) = \left\{y_1; y_2; ....; y_{\frac{n}{2}}\right\} = F$ و $Y_i = \left\{\varphi / \forall x \in E; \quad \varphi(x) \neq y_i\right\}$ حيث φ تطبيق من E نحو F

لدينا $\varphi \in Y_i \Leftrightarrow \varphi$ تطبيق من E نحو $F - \{y_i\}$

عدد التطبيقات المعرفة من E نحو $F - \{y_i\}$ هو $cardY_i = \left(\frac{n}{2} - 1\right)^n$

y_i تقبل على الأقل سابق بالتطبيق f في $E \Leftrightarrow f \in \overline{Y_i}$

كل عنصر من F يقبل على الأقل سابق بـ f في E (أي f شمولي من E نحو F) $\Leftrightarrow f \in \bigcap_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} \overline{Y_i}$

ومنه عدد التطبيقات الشمولية من E نحو F هو $card \bigcap_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} \overline{Y_i}$

لدينا عدد التطبيقات المعرفة من E نحو F هو $\left(\frac{n}{2}\right)^n$

ومنه $card \bigcap_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} \overline{Y_i} = card\, \overline{\bigcup_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} Y_i} = \left(\frac{n}{2}\right)^n - card \bigcup_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} Y_i$

$\varphi \in Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap ... \cap Y_{i_k} \Leftrightarrow \varphi$ تطبيق من E نحو $F - \left\{y_{i_1}; y_{i_2}; ....y_{i_k}\right\}$

ومنه $card\left(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap ... \cap Y_{i_k}\right) = \left(\frac{n}{2} - k\right)^n$

$$card \bigcup_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} Y_i = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \prec \frac{n}{2}} card\left(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap ... \cap Y_{i_k}\right) \right)$$

لدينا $C_{\frac{n}{2}}^{k}$ طريقة لاختيار $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \prec \frac{n}{2}$ ومنه $card \bigcup_{i \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]} Y_i = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^n$

إذن عدد التطبيقات الشمولية من E نحو F هو $\left(\frac{n}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^n$

لدينا $C_n^{\frac{n}{2}}$ لاختيار مجموعة F حيث $cardF = \frac{n}{2} \quad ; \quad F \subset E$

إذن عدد التطبيقات من E نحو E حيث $card\left[f\left(E\right)\right] = \frac{n}{2}$ هو $C_n^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(-1\right)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k}\left(\frac{n}{2}-k\right)^n\right]$

Moustaouli Mohamed