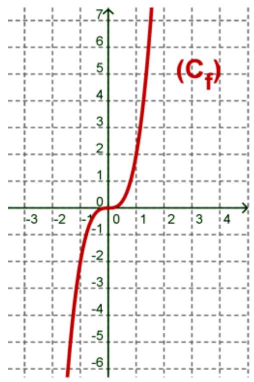
درس : تطبيقات الاشتقاق – دراسة و التمثيل المبياني لدالة عددية

ملحوظة:

في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عددية للمتغير الحقيقي x. (C_f) منحناها في (م . م . م) معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الدالة $f(x)=2x^3$



I. الاشتقاق وتطبيقاته:

01. الدالة المشتقة الثانية و تطبيقاتها:

A. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس ل (C_f) في نقطة x_0

1. نشاط:

نعتبر الدالة العددية : $f(x)=2x^3$

1) أحسب f' ثم f'' وحدد إشارة f'' .

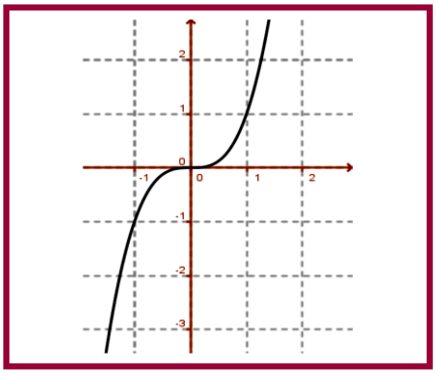
2) أنشئ بعض المماسات على $[0,+\infty[$ ثم على $]-\infty,0]$.

3) ماذا تلاحظ ؟ أعط الخاصية.

2. خاصية :

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I يحتوي على x_0 .

- إذا كان $f''(x_0)>0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد فوق المماس ل (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .
- إذا كان $f''(x_0)<0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد تحت المماس ل (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .



3. مثال: لنعتبر الدالة : $f(x)=x^3$

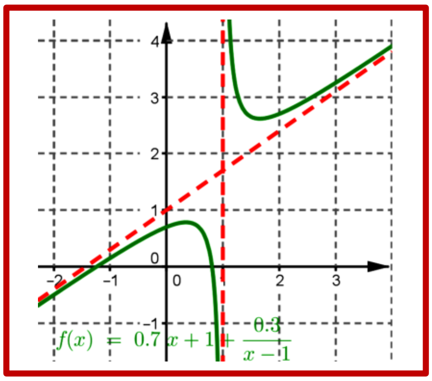
1) أحسب : $f''(x)$ ثم أعط إشارتها.

2) أنشئ بعض المماسات على المجال $[0,+\infty[$ ثم على $]-\infty,0]$.

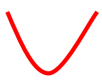
B. تقعر منحنى (C_f):

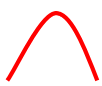
1. نشاط :

على المجال $]1,+\infty[$: نقول إن منحنى f له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة .
أو منحنى f محدب (convexe). ماذا تلاحظ ؟
على المجال $]-\infty,1[$ نقول إن : منحنى f له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة .
أو منحنى f مقعر (concave). ماذا تلاحظ ؟
أعط التعريف.



2. مصطلح ورمز :

منحنى f محدب (convexe) و يرمز له ب: ⟵ 

منحنى f مقعر (concave) و يرمز له ب: ⟵ 

3. تعريف:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.
منحنى f له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة أو محدب (convexe) على I إذا كان (C_f) يوجد فوق جميع مماسا ته على I.
منحنى f له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة أو مقعر (concave) على I إذا كان (C_f) يوجد تحت جميع مماسا ته على I.

4. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

- إذا كان: $\forall x\in I / f''(x)>0$ فإن (C_f) محدب (convexe) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة) .
  ونرمز له ب :
- إذا كان: $\forall x\in I / f''(x)<0$ فإن (C_f) مقعر (concave) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة) .
  ونرمز له ب:

5. مثال:

لنعتبر الدالة f حيث إشارة دالتها المشتقة الثانية f'' هي :

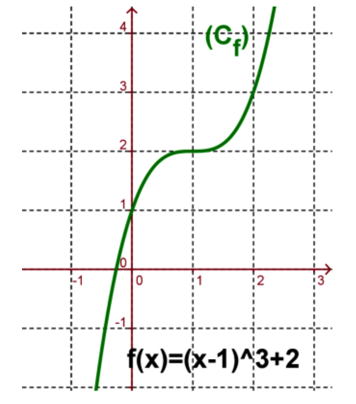
بواسطة الجدول التالي: أعط تقعر (C_f) منحنى الدالة f

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
تقعر (C_f)					||				

C. نقط انعطاف : POINTS D'INFLEXION

1. نشاط:

الشكل الآتي يمثل منحنى الدالة : $f(x)=(x-1)^3+2$



1) أحسب $f(1)$.
2) أنشئ المماس في $x_0=1$.
3) ماذا تلاحظ؟
4) النقطة $x_0=1$ تسمى نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f . أعط تعريف لذلك.
5) حدد إشارة f'' . هل يمكنك أن تستنتج الخاصية ؟

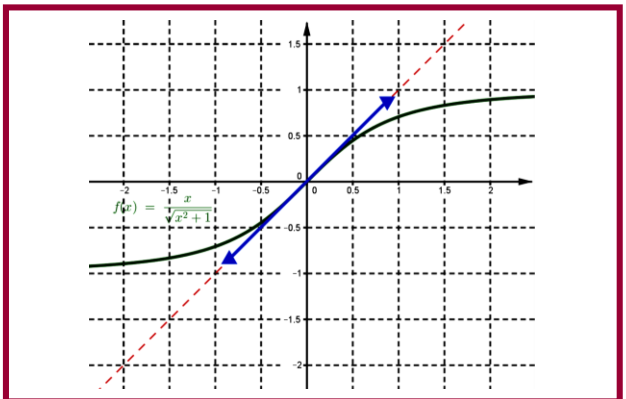
2. تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم . $M_0(x_0,x_0)$ نقطة من (C_f). (T) المماس ل (C_f) (في M_0) .

النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0.

3. مثال: لنعتبر الدالة :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



4. خاصية:

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I يحتوي على x_0 .

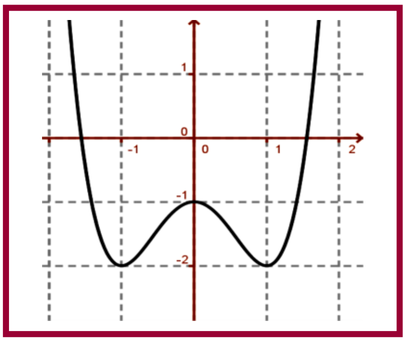
إذا كانت الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في x_0 وتتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف ل (C_f) منحنى الدالة f (أو نقطة انعطاف للدالة f) .

5. مثال 1:

نأخذ المثال (السابق الذي يمثل جدول إشارة " f). هل الدالة f تقبل نقط انعطاف حددها ؟

6. مثال2:

أنشئ نقط انعطاف للمنحنى (C_f) . إذا كان ممكن .



II. الفروع اللانهائية لمنحنى دالة f :

A. فرع اللانهائي :

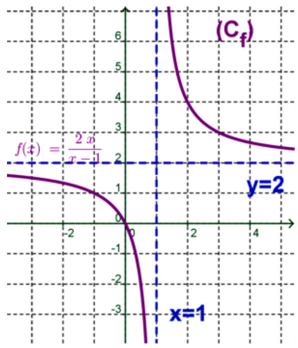
1. نشاط : فرع اللانهائي :

أنشطة:

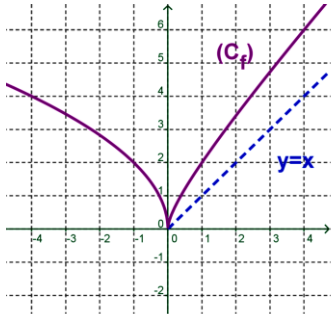
لدينا فرع اللانهائي :

- بجوار: $+\infty$ و $-\infty$ ثم 1 بالنسبة للرسم (1) ؛ ماذا تلاحظ بالنسبة للأفصول أو الأرتوب ؟
- بجوار: $+\infty$ و $-\infty$ بالنسبة لرسم (2) ماذا تلاحظ بالنسبة للأفصول أو الأرتوب ؟
- بجوار: $+\infty$ و $-\infty$ بالنسبة لرسم (3) ماذا تلاحظ بالنسبة للأفصول أو الأرتوب ؟
- أعط تعاريف لذلك .

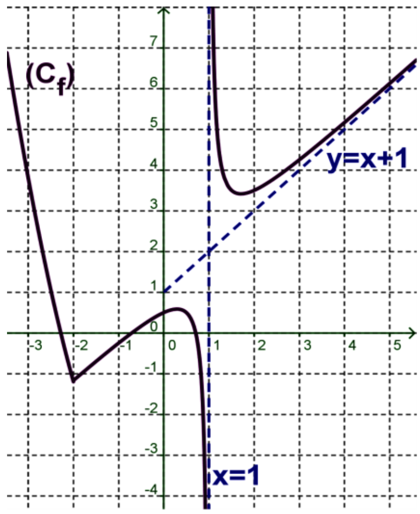
$$f(x)=\frac{2x}{x-1} \quad (1)$$



$$(2)\begin{cases} f(x)=2\sqrt{-x} & ; x<0 \\ f(x)=x+\sqrt{x} & ; x>0 \end{cases}$$



$$(3)\begin{cases} f(x)=x^2-5,2 & ; x\in]-\infty,-2] \\ f(x)=x+1+\dfrac{1}{2(x-1)} & ; x\in]-2,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

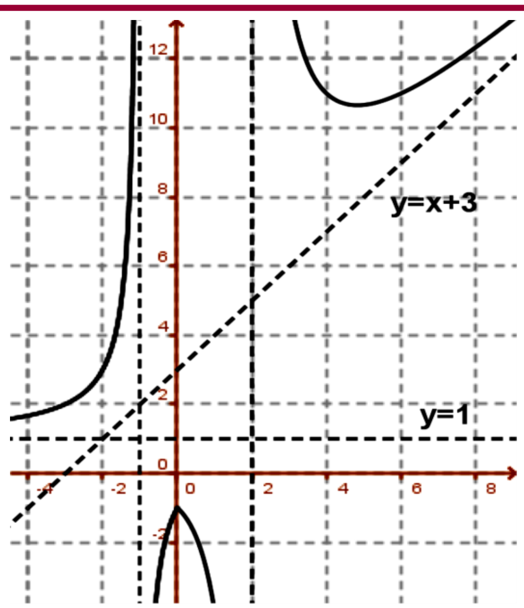


2. تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم.

إذا آلت على الأقل إحدى إحداثيتي نقطة M من (C_f) إلى مالا نهاية

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا لانهائيا.



3. مثال:

1) حدد الفروع اللانهائية ل (C_f).

III. أنواع الفروع اللانهائية :

A. مقارب أفقي - ASYMPTOTE HORIZONTALE

1. نشاط :

بالنسبة للرسم رقم 1 . نقول إن المنحنى (C_f) يقبل مقارب أفقي هو المستقيم الذي معادلته $(D) : y = 2$ مع. $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

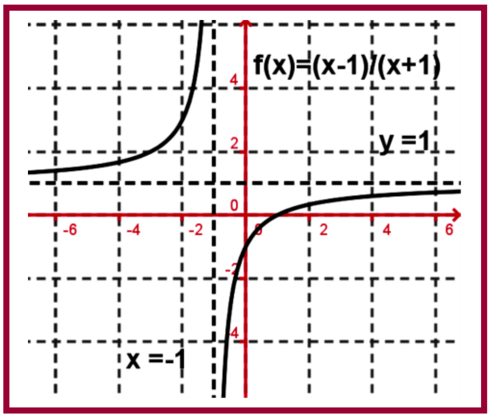
أعط تعريف لذلك.

2. تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a,+\infty[$ ($]-\infty,a[$).

إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$) فإن المستقيم الذي معادلته $y=b$ ($y=c$) مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$ (بجوار $-\infty$)

3. مثال:



$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

إذن المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$

B. مقارب عمودي – ASYMPTOTE VERTICALE:

1. نشاط : نأخذ الشكل السابق

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $(D) : x = 1$. مع $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$. أعط تعريف لذلك.

2. تعريف:

f دالة عددية معرفة $D\setminus\{x_0\}$ (أي f غير معرفة في x_0) .

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$) فإن المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ مقارب عمودي ل (C_f) عند x_0 على اليمين (على اليسار).

3. مثال: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$. إذن المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب عمودي ل (C_f). (أنظر الرسم)

C. مقارب مائل – ASYMPTOTE OBLIQUE :

1. نشاط :

نأخذ الرسم 3 الذي يمثل جزء من الدالة: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{2(x-1)}$ المعرف على $]-2,1[\cup]1,+\infty[$.

1) ماذا تلاحظ ؟

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)$.

2. مفردات :

نقول إن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$.

3. تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a,+\infty[$ ($]-\infty,a[$) . (C_f) منحنى الدالة f في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ ($y=a'x+b'$) هو مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$ (بجوار $-\infty$) يعني:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0 \end{cases} \cdot \left(\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(a'x+b')=0 \end{cases}\right)$$

4. مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-1}$

بين أن : المستقيم الذي معادلته $y=x-2$: يقبل مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

خلاصة: المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ يسمى مقارب مائل بجوار ∞ ل (C_f).

5. ملاحظة:

- إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يوجد قطعا فوق المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$
- إذا كان $f(x)-(a'x+b')<0$ فإن (C_f) يوجد قطعا تحت المقارب المائل الذي معدلته $y=a'x+b'$ بجوار $-\infty$.
- إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.

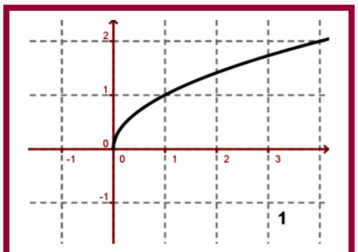
6. تحديد : a و b

أ- خاصية:

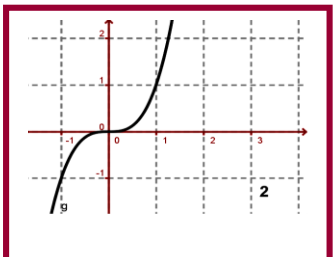
إذا كان $y=ax+b$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار ∞ فإن: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax$.

ب- حالات خاصة:

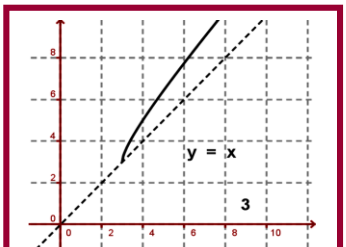
- $a=0$ في هذه الحالة نقول إن (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل . (الشكل -1-)
- $a=\infty$ في هذه الحالة نقول إن (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب . (الشكل -2-)
- $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq0$ أو $a\neq\infty$) و $b=\infty$ في هذه الحالة نقول إن (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم الذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞ . (الشكل -3-)



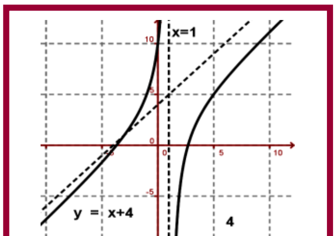
$f(x)=\sqrt{x}$



$f(x)=x^3$



$f(x)=x+\sqrt{x-3}$

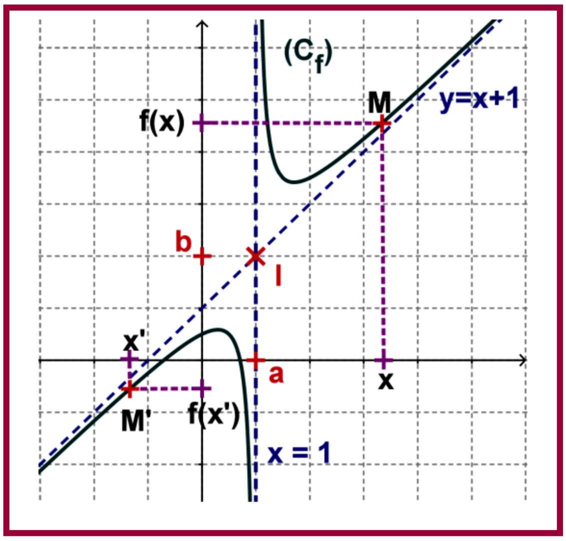


$f(x)=x+3-\dfrac{(x+7)}{(x-1)}$

7. ملاحظة:

إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=c$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار ∞ معادلته $y=ax+b+c$.

8. مثال: $\left(f(x)=2x-1+\dfrac{3x-5}{x+4}\right)$ (الشكل -4-)



IV. محور تماثل منحنى $(\mathcal{C}_f)$ – مركز تماثل منحنى $(\mathcal{C}_f)$.

A. مركز تماثل منحنى : Centre de symétrie

1. نشاط :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (C_f) منحنى دالة f حيث $I(a,b)$ مركز تماثل (C_f). $M(x,y)$ نقطة من (C_f).

حيث مماثلها هي $M'(x',y')$ بالنسبة للتماثل المركزي S_I. لدينا: $S_I(M)=M'$

1) أتمم: $\begin{cases} a=\ldots\ldots \\ b=\ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots I \Leftrightarrow S_I(M)=M'$

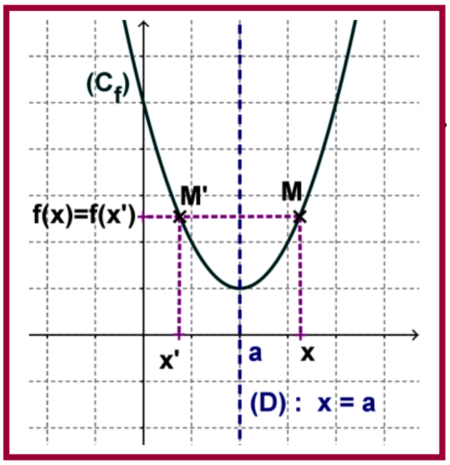
2) أعط الخاصية.

2. خاصية:

f دالة عددية معرفة على D_f. (C_f) منحنها على D_f في معلم .

النقطة $I(a,b)$ هي مركز تماثل ل $(\mathcal{C}_f)$ يكافئ : $\begin{cases} \forall x\in D_f \;;\; 2a-x\in D_f \\ \forall x\in D_f \;;\; f(2a-x)+f(x)=2b \end{cases}$

B. محور تماثل ل $(\mathcal{C}_f)$:



1. نشاط :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$. (C_f) منحنى دالة f عددية معرفة على D_f.

حيث المستقيم الذي معادلته $x=a$: (D) هو محور تماثل ل (C_f).

$M(x,y)$ نقطة من (C_f) حيث مماثلها هي $M'(x',y')$ بالنسبة للتماثل المحوري $S_{(D)}$.

لدينا: $S_{(D)}(M)=M'$

1) أتمم: $\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow (D)\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow S_{(D)}(M)=M'$

2) أعط الخاصية.

2. خاصية:

f دالة عددية معرفة على D_f. (C_f) منحنها على D_f في معلم متعامد ممنظم.

المستقيم الذي معادلته $D: x=a$ هو محور تماثل ل $(\mathcal{C}_f)$ يكافئ : $\begin{cases} \forall x\in D_f \;;\; 2a-x\in D_f \\ \forall x\in D_f \;;\; f(2a-x)=f(x) \end{cases}$.

3. مثال:

لنعتبر الدالة العددية: $f(x)=(x-1)^2+1$.

بين أن: (C_f) منحنى f يقبل محور تماثل على D_f يتم تحديده.

V. مجموعة دراسة دالة

1. تعاريف:

f دالة عددية معرفة على I' حيث $D_f = I \cup I'$ و I' و I متماثلين بالنسبة ل 0 مع I يحتوي على الأعداد الموجبة و I' يحتوي على الأعداد السالبة.

- إذا كانت f زوجية أو فردية يكفي دراسة الدالة على المجموعة $D_E = I$ أو $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.
  - أ- تغيرات f على I' هي نفس تغيرات f على I إذا كانت f فردية.
  - ب- تغيرات f على I' هي عكس تغيرات f على I إذا كانت f زوجية.
- إذا كانت f دورية و دورها $P = T$ يكفي دراسة على $D_E = D_f \cap J$ مع J مجال طوله T.

2. مثال:

$f(x) = \sin(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$ ودورية ودورها 2π أي دراستها على مجال طوله $P = T$:

$D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi[= [0, 2\pi[$ أو . $D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi] = [0, 2\pi]$ أو. $D_E = \mathbb{R} \cap [-\pi, \pi[= [-\pi, \pi[$ أو ....

3. ملحوظة:

إذا كانت f دورية و دورها $P = T$ و زوجية (أو فردية) على D_f يكفي دراستها على مجال طوله $\frac{T}{2}$ أي $D_E = D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$ أو $D_E = D_f \cap \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right[$.

4. مثال:

- مثال 1 : $f(x) = \sin(x)$ هي معرفة و دورية و فردية على $\mathbb{R}$ ودورها $T = 2\pi$. ندرس الدالة f على مجال طوله π.

  خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E = \mathbb{R} \cap [0, \pi] = [0, \pi]$ أي $D_E = [0, \pi]$.
- مثال 2 : $f(x) = \cos(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$. ودورية ودورها 2π و زوجية ; و بالتالي ندرسها على $D_E = \mathbb{R} \cap [0, \pi] = [0, \pi]$

VI. تصميم دراسة دالة عددية :

1	مجموعة تعريف الدالة f : D_f	8	دراسة إشارة f' على D_f أو D_E
2	دراسة زوجية أو دورية f (إذا كان ذلك ممكن)	9	إعطاء جدول تغيرات f على D_f أو D_E
3	استنتاج مجموعة دراسة f : D_E	10	إذا كان ذلك ممكن دراسة تقعر أو نقط انعطاف f
4	نهايات f عند محدات D_f أو D_E	11	إنشاء (1 المعلم – 2) المقاربات - 3) بعض المماسات) حيث $f'(x) = 0$ أو نقط انعطاف f إذا كان ممكن..) – 4) إنشاء (C_f)
5	استنتاج الفروع اللانهائية ل f	12	هناك بعض الأسئلة الإضافية مثل حل مبيانيا المعادلة $x \in D_f / f(x) = m$ و $x \in D_f / f(x) = g(x)$ أو المتراجحة $x \in D_f / f(x) \le 0$..
6	دراسة الوضع النسبي للمنحى f و المقارب المائل (إذا كان ذلك ممكن)	13	ثم دراسة الدالة $g(x) = \sqrt{f(x)}$ أو $g(x) = f(\|x\|)$
7	حساب الدالة المشتقة f' ل f على D_f أو D_E	14	أو أسئلة أخرى ربط هذه الدالة بالفيزياء أو ....

VII. مثال:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$. ليكن (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب النهايات عند محد ات D_f.

3) حدد a ; b ; c من $\mathbb{R}$: $\forall x\in D_f ; f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

5) أدرس الوضعية النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل .

6) أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f.

7) أدرس إشارة f' على D_f ثم أعط جدول تغيرات f .

8) أدرس تقعر المنحنى (C_f) على D_f .

9) بين أن النقطة $I(1,1)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) .

10) أنشئ (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.