محور تماثل

نقول بان المستقيم $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطين :

1) $2a - x \in D_f \quad (\forall x \in D_f)$

2) $f(2a - x) = f(x)$

أمثلة

بين أن المستقيم $x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f) في الحلات التالية :

1) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ و $x = -2$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ و $x = -\dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \cos^2 x - \sin x$ و $x = \dfrac{\pi}{2}$

4) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ و $x = 1$

مركز تماثل

نقول بان النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطين :

1) $2a - x \in D_f \quad (\forall x \in D_f)$

2) $f(2a - x) = 2b - f(x)$

أمثلة

بين أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) في الحالات التالية :

1) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$ و $\Omega(-2;3)$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ و $\Omega(2,4)$

3) $f(x) = \cos x + \sin 2x$ و $\Omega\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$

4) $f(x) = x - 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$ و $\Omega(0,-1)$

تقعر المنحنى (C_f)

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I

1) إذا كان $f''(x) > 0 \quad (\forall x \in I)$ فإننا نقول بأن المنحنى (C_f) محدب على I

2) إذا كان $f''(x) < 0 \quad (\forall x \in I)$ فإننا نقول بأن المنحنى (C_f) مقعر على I

3) إذا كان $f''(a) = 0$ و $f''(x)$ تتغير إشاتها بجوار a فإن النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

أمثلة

أدرس تقعر منحنى الدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

2) $f(x) = x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

4) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ على $I = [0,\pi]$

المقارب $y = b$

إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ فإننا نقول بأن المستقيم $y = b$ (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند ∞

أمثلة

أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ أو $-\infty$ في كل من الحالات التالية

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 4}$ عند $-\infty$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{(2x-1)^3}$ عند $+\infty$

3) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1} - 3}{3x+2}$ عند $+\infty$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$ عند $-\infty$

5) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x + \sqrt{x^2 - x}}$ عند $+\infty$

المقارب $x = a$

إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$

أو $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$ فإننا نقول بأن المستقيم $x = a$

مقارب للمنحنى (C_f)

أمثلة

بين أن المستقيم $x = a$ مقارب للمنحنى (C_f) في الحالات التالية :

1) $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x-2)^2}$ و $x = 2$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ و $x = -1$

3) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2}$ و $x = \sqrt{2}$

المقارب المائل

نقول بأن المستقيم $y = ax + b$ ، $a \neq 0$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞ إذا كان :

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$$

أمثلة

بين أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞ في كل من الحالات التالية :

1) $y = 2x - 3$ و $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2}{(x+1)^2}$

2) $y = x - 2$ و $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 + x + 1}$

3) $y = 2x$ و $f(x) = \sqrt{x^2+4} + x$ عند $+\infty$

خاصية 1

إذا كان $f(x) = ax + b + h(x)$ ، $a \neq 0$ ،

و $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$ فإن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) بجوار ∞

أمثلة

حدد معادلة المقارب المائل في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$

3) $f(x) = -x + 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}+1}$

4) نضع $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

أ ـ حدد الأعداد a , b , c بحيث يكون :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) \ f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x-1)^2}$$

ب ـ استنتج المقارب المائل للمنحنى (C_f)

خاصية 2

إذا كان : $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

و $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$ فإن لمستقيم $y = ax + b$

مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞

أمثلة

حدد معادلة المقارب المائل للمنحنى (C_f) في الحالات التالية :

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x+2}$ بجوار $-\infty$

2) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} + x$ بجوار $+\infty$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 1}{x^2+1}$ بجوار $+\infty$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$ بجوار $-\infty$

الفروع الشلجمية

لتكن f دالة بحيث : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

أمثلة

أرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) في الحالات التالية :

☜ إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

☜ إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

☜ إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$

و $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=ax$

1) $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x-2}$ بجوار $-\infty$

2) $f(x)=x+2-\sqrt{x+1}$ بجوار $+\infty$

3) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}+3}$ بجوار $+\infty$

4) $f(x)=(x+1)\sqrt{x-2}$ بجوار $+\infty$

5) $f(x)=\frac{1}{2}x-1+\frac{2x}{\sqrt{1-x}}$ بجوار $-\infty$

تمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}$

1) حدد D_f و أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3) بين أن $f'(x)=\frac{(x+1)(x^2-4x+6)}{(x-1)^3}$

4) ثم ضع جدول تغيرات الدالة

5) أرسم المنحنى (C_f)

تمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

1) أ- حدد D_f و أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f

ب- بين أن المستقيم $x=-1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$

ب- ثم ضع جدول تغيرات الدالة

4) أرسم المنحنى (C_f)

تمرين رقم 3 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{2(x-1)}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب نهايات الدالة f

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى C_f

4) بين أن $f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{2(x-1)^2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى C_f