تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

01. التمرين الأول

1- تحديد D_f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 3x^3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

خلاصة :

$$D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

2- دراسة زوجية f :

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$\forall x \in D_f, f(-x) = -x + \frac{1}{3(-x)^3}$$
$$= -x + \frac{1}{-3x^3}$$
$$= -(x + \frac{1}{3x^3})$$
$$= -f(x)$$

خلاصة : f دالة فردية

تحديد D_E مجموعة دراسة f

بما ان f دالة فردية

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

فان $D_E =]0;+\infty[$

خلاصة : $\boxed{D_E =]0;+\infty[}$

3- حساب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x+\frac{1}{3x^3} = +\infty$$

و

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+\frac{1}{3x^3} = +\infty$$

4- حساب f' لكل x من D_E

$$\forall x \in D_E, f'(x) = \left[x+\frac{1}{3x^3}\right]'$$

$$=(x)'+\left[\frac{1}{3x^3}\right]'$$

$$=1-\frac{(3x^3)'}{9x^6}$$

$$=1-\frac{9x^2}{9x^6}$$

$$=1-\frac{1}{x^4}$$

خلاصة : $\boxed{\forall x \in D_E, f'(x)=1-\frac{1}{x^4}}$

5 – اشارة f' على D_E :

تصحيح السلسلة رقم 11

الصفحة

من طرف التلميذة يماني آية

لنحل المعادلة $1-\frac{1}{x^4}=0$:

$$1-\frac{1}{x^4}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^4}=1$$
$$\Leftrightarrow x^4=1$$

$\Leftrightarrow x=-1$ أو $\Leftrightarrow x=1$

خلاصة :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	

6- جدول تغيرات f على D_E :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

جدول تغيرات f على D_f :

بما ان f دالة فردية فانها تحافظ على الرتابة

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

7 _ دراسة الفروع اللانهئية ل (C) على D_f :

لدينا : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

بجوار 0 :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

و منه المستقيم معادلته x=0 مقارب عمودي ل(C) بجوار $\pm\infty$

نلاحظ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$

ومنه (C) يقبل مقارب مائل هو المستقيم معادلته x=y

8- دراسة الوضع النسبي ل (C) و المستقيم x=y على $]0;+\infty[$:

لندرس الفرق : $f(x) - x$

$$f(x) - x = x + \frac{1}{3x^3} - x$$

$$= \frac{1}{3x^3}$$

و لدينا $\forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{3x^3} \geq 0$

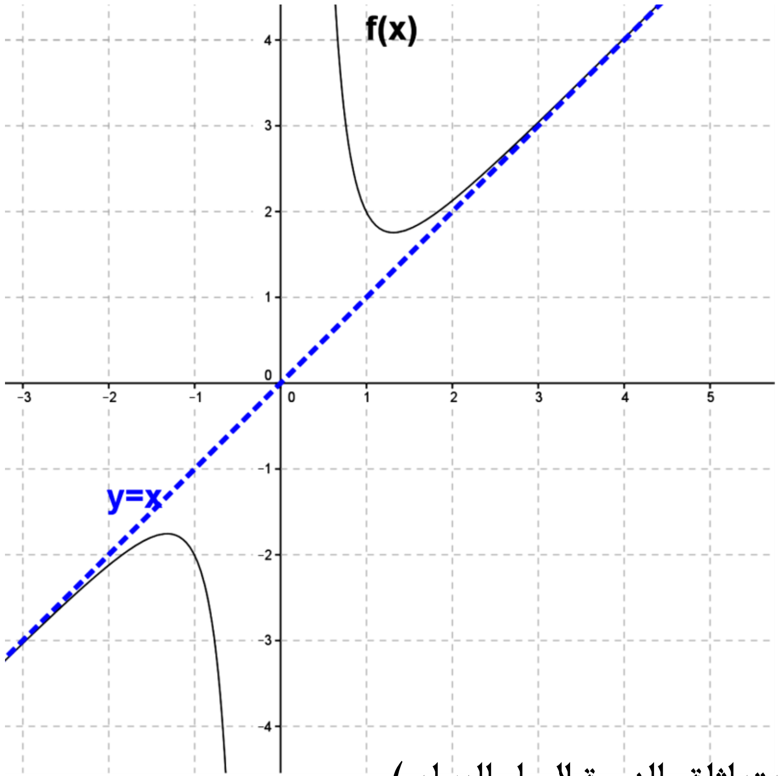
و منه (C) فوق المستقيم x=y على $]0;+\infty[$

9- انشاء (C) :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة



لان f دالة فردية (متماثلة بالنسبة لاصل المعلم)

10- دراسة زوجية g :

$$\forall x \in D_g , -x \in D_g$$

$$\forall x \in D_g , g(-x) = |-x| + \frac{1}{3\left|(-x)^3\right|}$$

$$= |x| + \frac{1}{\left|-3x^3\right|}$$

$$= |x| + \frac{1}{\left|3x^3\right|}$$

$$= g(x)$$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

خلاصة : g دالة زوجية

11 - مقارنة f و g على $]0;+\infty[$

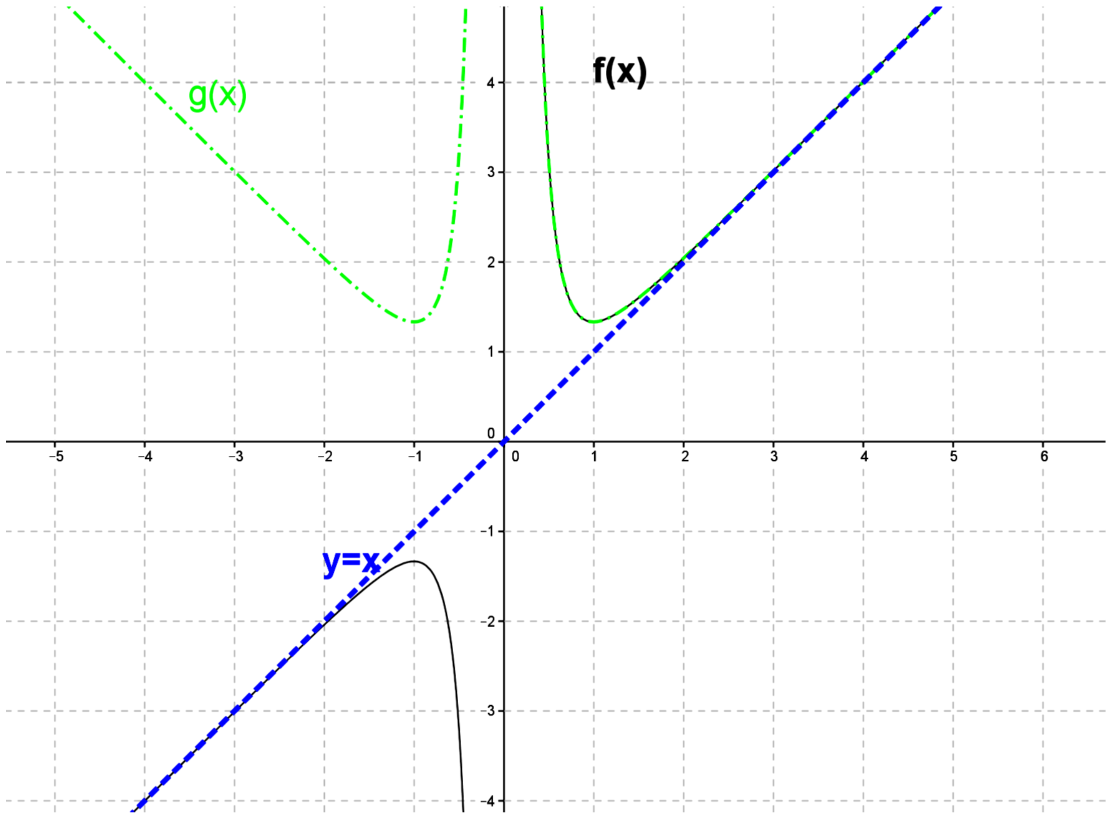
على $]0;+\infty[$ تصبح g : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = x + \dfrac{1}{3x^3}$

خلاصة : على $]0;+\infty[$ $f=g$

استنتاج $C_{]0;+\infty[}$:

بما ان f=g على $]0;+\infty[$ فان منحنى g يطابق منحنى f على $]0;+\infty[$

انشاء C_g



تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

02. التمرين الثاني :

1 – حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

نبين ان $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+2\sqrt{1-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=-\infty(1-0-2\times0)$$

$$=-\infty$$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2- دراسة اشتقاق f في $x_0=1$:

على اليمين :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x+1}{x^3+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

على اليسار :

تصحيح السلسلة رقم 11

الصفحة

من طرف التلميذة يماني آية

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1+2\sqrt{1-x}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}1+\frac{2\sqrt{1-x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2}{\sqrt{1-x}}$$
$$=1-\frac{2}{0^+}$$
$$=-\infty$$

تاويل النتائج :

المستقيم $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ مماس ل C_f على يمين 1 $\lim_{x\to1^+}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

C يقبل مماس راسي متجه نحو $\lim_{x\to1^-}=-\infty\Leftrightarrow$

3 – ا – نبين ان f تزايدية على $[1;+\infty[$ الاعلى :

نحسب f ' على $[1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^3+1\right)-3x^2\left(x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{3x^2+3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\left(\frac{\sqrt{6}x}{x^3+1}\right)^2$$

و بما ان $\left(\frac{\sqrt{6}x}{x^3+1}\right)^2\geq0$ فان f تزايدية على $[1;+\infty[$

ب – نبين ان : $\forall x\in]-\infty;1[,\ f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

الصفحة

$$\forall x \in \left]-\infty;1\right[,\ f'(x) = \left[x-1+2\sqrt{1-x}\right]'$$

$$=1+2\left(\sqrt{1-x}\right)'$$

$$=1+2\times\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}\times\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x}\times\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

خلاصة :

$$\forall x \in \left]-\infty;1\right[,\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}\times\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$$

ج- جدول تغيرات f :

على المجال $[1;+\infty[$: f تزايدية

على المجال $]-\infty;1[$:

لندرس اشارة f ' على $]-\infty;1[$

اشارة f ' هي اشارة −x

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

و $-x$ ينعدم في 0

ومنه :

x	$-\infty$	0	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

4-أ-دراسة الفرعين اللانهائيين ل (C) :

بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

و منه المستقيم معادلته $y=1$ مقارب افقي ل (C) بجوار $+\infty$

بجوار $-\infty$:

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}+2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$=1-0+2\times 0$$

$$=1$$

و

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

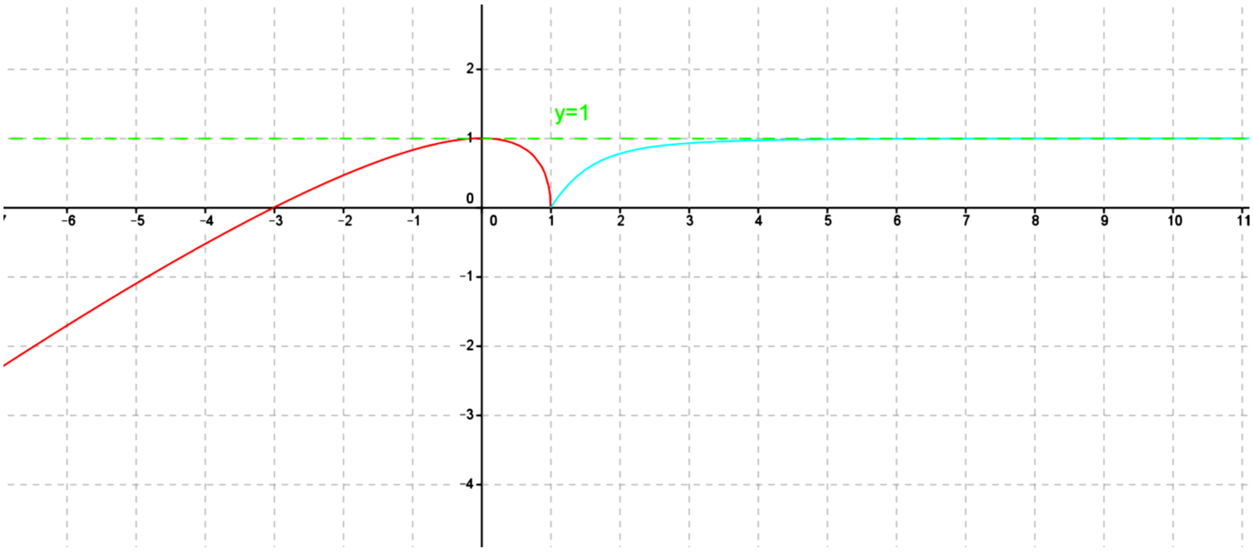
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} -1 + 2\sqrt{1-x}$$

$$= -1 + 2 \times (+\infty)$$

$$= +\infty$$

و منه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم x=y بجوار $-\infty$

ب- انشاء C_f :



.03 التمرين الثالث :

1 – تحديد D_f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2 + \cos(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \neq -2$$

و بما ان $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$

فان $D_f = \mathbb{R}$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

خلاصة : $D_f=\mathbb{R}$

2- أ – دراسة زوجية f على D_f

$$\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=\frac{2\cos(-x)+1}{2+\cos(-x)}$$

$$=\frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$$

$$=f(x)$$

و منه $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=f(x)$

خلاصة : f دالة زوجية

ب – نبين ان f دورية و دورها $T=2\pi$

$$f(x+2\pi)=\frac{2\cos(x+2\pi)+1}{2+\cos(x+2\pi)}$$

$$=\frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}$$

$$=f(x)$$

و منه $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+2\pi)=f(x)$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

خلاصة : f دورية و دورها $T=2\pi$

ج – استنتاج D_E :

لدينا f زوجية و دورية دورها $T=2\pi$

و منه $D_E=[0,\pi]$

3 – أ-حساب f' على D_f :

$$\forall x\in D_f\,,\ f'(x)=\left[\frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}\right]'$$

$$=\frac{[2\cos(x)+1]'\times[2+\cos(x)]-(2\cos(x)+1)\times[2+\cos(x)]'}{[2+\cos(x)]^2}$$

$$=\frac{-2\sin(x)\times[2+\cos(x)]+2\cos(x)\times\sin(x)+\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$$

$$=\frac{-3\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$$

خلاصة : $f'(x)=\dfrac{-3\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$

ب–اشارة f' على D_E

بما ان $f'(x)=\dfrac{-3\sin(x)}{[2+\cos(x)]^2}$

فان اشارة f' هي اشارة $-\sin(x)$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

و نعلم ان على $[0,\pi]$ تكون $\sin(x)\geq 0$

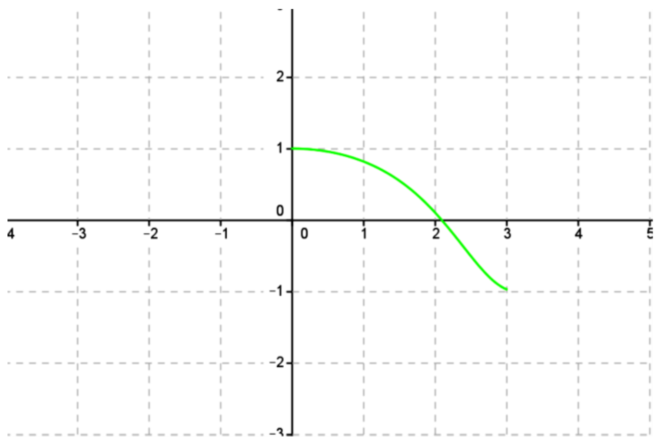
و بالتالي $f'(x)\leq 0$

خلاصة: $\forall x\in[0,\pi],\ f'(x)\leq 0$

ج– جدول تغيرات f على D_E :

x	0 $\qquad\qquad$ π
f(x)	1 $\searrow$ -1

4–أ– انشاء C_0 على D_E :



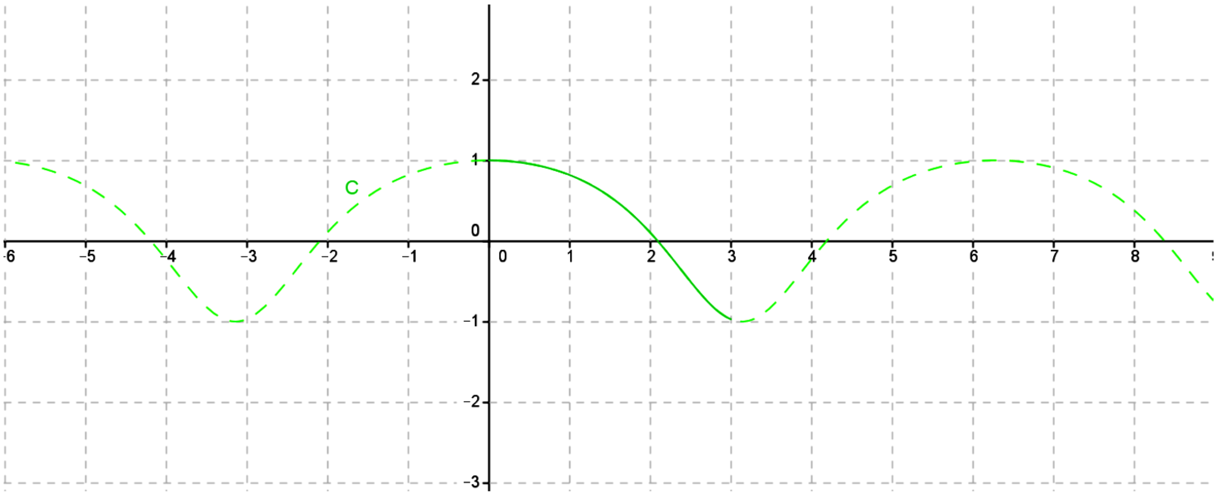
ب– انشاء C_f :

بما ان f زوجية ننشئ مماثل C_0 بالنسبة لمحور الاراتيب

و بما ان f دورية نستعمل الازاحة التي متجهتها $\vec{u}=2k\pi\vec{i}$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية



التمرين الرابع :

1–أ–تحديد D_f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{أو} \quad x \geq 1$$

خلاصة : $\boxed{D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$

ب–امكانية دراسة f على $D = [1, +\infty[$:

ندرس زوجية f :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

$$\forall x \in D_f , -x \in D_f$$

$$\forall x \in D_f , f(-x) = 1 - |-x| + \frac{4}{5}\sqrt{(-x)^2 - 1}$$

$$= 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}$$

$$= f(x)$$

ومنه f زوجية نكتفي بدراستها على $D = [1, +\infty[$

ج- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 - x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= +\infty \times -\frac{1}{5}$$

$$= -\infty$$

خلاصة : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2- أ-دراسة قابلية اشتقاق f على يمين $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} -1 + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} -1 + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$= +\infty$$

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

خلاصة : f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1

ب- نبين ان $\forall x \geq 1, f'(x) = \dfrac{25-9x^2}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$

$$f'(x) = \left[1-x+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}\right]'$$

$$=-1+\frac{4}{5}\times\frac{\left[x^2-1\right]'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-1+\frac{4x}{5\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{4x-5\sqrt{x^2-1}}{5\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{16x^2-25x^2+25}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$$

خلاصة : $\forall x \geq 1, f'(x) = \dfrac{25-9x^2}{5\sqrt{x^2-1}\left(4x+5\sqrt{x^2-1}\right)}$

ج- جدول تغيرات f :

على D :

x		5/3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ +	0	−
$f(x)$	↗		↘

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

على D_f :

x	$-\infty$		$-5/3$		-1		1		$5/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘				↗		↘	

3-أ- نثبت ان (C_f) يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1+\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$=0-1+\frac{4}{5}\sqrt{1-0}$$

$$=-\frac{1}{5}$$

و لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{5}x\right)=\lim_{x\to+\infty}1-x+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{5}x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{5}x^2\left(\frac{-1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}\right)+1$$

$$=+\infty(0+0)+1$$

$$=1$$

خلاصة: المستقيم معادلته $y=-\frac{1}{5}x+1$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$

ب- تحديد تقاطع (C_f) مع محور الافاصيل :

تصحيح السلسلة رقم 11

من طرف التلميذة يماني آية

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-|x|+\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}=0$$
$$\Leftrightarrow 5-5|x|+4\sqrt{x^2-1}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=\frac{-5}{4}+\frac{5}{4}|x|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=\frac{5}{4}(|x|-1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-1=\frac{25}{16}(x^2-2|x|+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-\frac{25}{16}x^2+\frac{25}{8}|x|=1+\frac{25}{16}$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{16}x^2-\frac{25}{8}|x|+\frac{41}{16}=0$$

و منه : $|x|=1$ او $|x|=\frac{41}{9}$

خلاصة : تقاطع (C_f) مع محور الافاصيل هما النقط $A(1;0)$ و $B\left(\frac{41}{9};0\right)$

و $(-1;0)$ و $D\left(\frac{-41}{9};0\right)$

ج-انشاء (C_f) :