الجداء السلمي لمتجهتين :

➢ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = AB\ AC\ \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

➢ $\vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

خاصيات :

$\vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}$ و $\vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{u}\bullet\vec{w}$

$\vec{u}\bullet\left(k\vec{v}\right) = k\,\vec{u}\bullet\vec{v}$ و $\left(k\vec{u}\right)\bullet\vec{v} = k\,\vec{u}\bullet\vec{v}$

➢ الجداء $\vec{u}\bullet\vec{u}$ يسمى مربع سلمي ويكتب $\vec{u}^2$

➢ العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويكتب $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

➢ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$

خاصيات المنظم :

$\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\bullet\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$

متفاوتة كوشي شوارز:

$|\vec{u}\bullet\vec{v}| \le \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ لكل متجهتين $\vec{u}$, $\vec{v}$

تحليلية الجداء السلمي :

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

و $\vec{u}(a,b)$ و $\vec{v}(c,d)$ فإن: $\vec{u}\bullet\vec{v} = ac + bd$

ومنظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$

صيغة cos و sin :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \quad \text{و} \quad \sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

التمرين الأول:

أحسب الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الحالات التالية :

① $\|\vec{u}\| = 2$ و $\|\vec{v}\| = 3$ و $\overline{\left(\vec{u},\vec{v}\right)} = \frac{\pi}{6}$

② $\|\vec{u}\| = \sqrt{8}$ و $\|\vec{v}\| = 6$ و $\overline{\left(\vec{u},\vec{v}\right)} = \frac{\pi}{4}$

فيما يلي نعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

التمرين الثاني:

أحسب الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الحالات التالية:

❶ $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(2,-5)$

❷ $\vec{u} = 2\vec{i} - 9\vec{j}$ و $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j}$

❸ حدد قيمة m كي تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين في الحالات التالية:

⇦ $\vec{u}(3,m-1)$ و $\vec{v}(2m+1,-2)$

⇦ $\vec{u}(m+3,-1)$ و $\vec{v}(m-1,5)$

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ في الحالات التالية :

☜ $A(4,-2)$; $B(2,3)$; $C(-5,1)$

☜ $A\left(2+\sqrt{2},4\right)$; $B\left(3,-2\sqrt{2}\right)$; $C\left(\sqrt{2}-1,2\right)$

التمرين الثالث:

أحسب منظم المتجهة $\vec{u}$ في الحالات التالية:

☺ $\vec{u}(-3,4)$ ☺ $\vec{u}(2,-4)$

☺ $\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{i} - 6\vec{j}$ ☺ $\vec{u}\left(\sqrt{3}-2,2\sqrt{3}+1\right)$

التمرين الرابع:

1) نعتبر النقط $A\left(2,\sqrt{3}\right)$; $B\left(-1,2\sqrt{3}\right)$; $C\left(0,\sqrt{3}\right)$

أ- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و المسافتين AC ; AB

ب- أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

2) نعتبر النقط $A(-1,1)$; $B\left(1,\frac{-1}{2}\right)$; $C\left(\frac{-1}{3},\frac{-11}{3}\right)$

أ- أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

ب- استنتج قياس الزاوية $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$

التمرين الخامس :

ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع و نقطة بحيث

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} : (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{*2}$$

بين أن $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}}$

التمرين السادس :

ABC مثلث A' و B' و C' منتصفات القطع $[BC]$،$[AC]$ و $[AB]$ على التوالي و نضع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$

1- بين أن $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AB} = -\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

2- بين أن $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

3- أثبت أن $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

4- G مركز ثقل المثلث ABC ونضع $\alpha = G\hat{C}B'$ و $\beta = C'\hat{B}G$

أ- بين أن $\dfrac{c}{CC'}\sin\beta = \dfrac{b}{BB'}\sin\alpha$

ب- استنتج أن $S_{BC'G} = S_{CB'G}$

التمرين السابع :

بين أن $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ (a+b)^2 \le \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)$

(باستعمال خاصية كوشي شوارز)