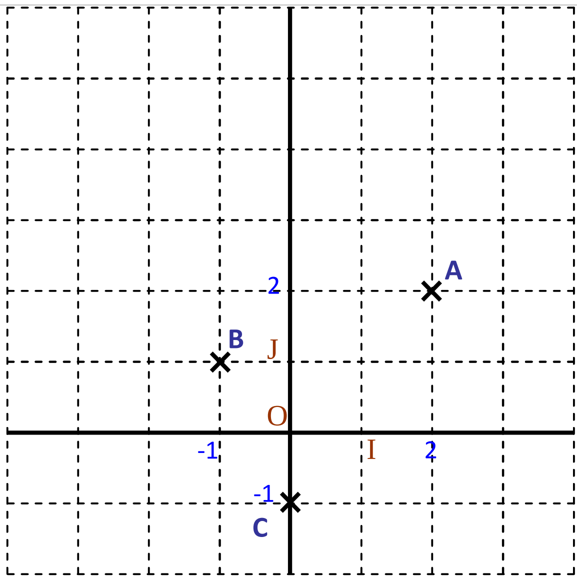
السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	تحليلية الجداء السلمي حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1



2

أ) لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{BM}(x+1\,;\ y-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;-3)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -2(x+1)-3(y-1)=0\Leftrightarrow -2x-2-3y+3=0\Leftrightarrow -2x-3y+1=0$$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ -2x-3y+1=0}$ أو أيضا : $\boxed{(\Delta):\ 2x+3y-1=0}$

ب) لنحدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)، لنحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2\,;\ y-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;-3)$

$$M\in(AC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2\\ -2 & -3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -3(x-2)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+6+2y-4=0\Leftrightarrow -3x+2y+2=0$$

بالتالي : $\boxed{(AC):\ -3x+2y+2=0}$ أو أيضا : $\boxed{(AC):\ 3x-2y-2=0}$

الآن و لكي نحدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

علينا حل النظمة المكونة من معادلتي (Δ) و (AC)، أي : $\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=2\end{cases}$

لدينا المحددة هي : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=-4-9=-13$ و $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{vmatrix}=-2-6=-8$

و $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1$ ، منه : $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{8}{13}$ و $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-1}{13}$ بالتالي: $\boxed{H\left(\dfrac{8}{13}\,;\dfrac{-1}{13}\right)}$

3

لدينا : $\overrightarrow{CA}(\ 2\ \ ;\ 3\ )$ و $\overrightarrow{CB}(\ -1\ \ ;\ 2\ )$

إذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-2+6=4$ و $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ و $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$$\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

4

أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}.(-3;-1)$ و $\overrightarrow{AM}.(x-2;y-2)$

منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-3(x-2)-(y-2)=-3x+6-y+2=-3x-y+8$

ب) لدينا : $3x+y-3=0 \Leftrightarrow -3x-y+8=5 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=5$

إذن مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=5$ هي المستقيم (L) ذو المعادلة : $(L):\ 3x+y-3=0$

لدينا $\vec{u}(-1;3)$ هي متجهة موجهة لـ (L) و $\overrightarrow{AB}.(-3;-1)$ ، ومنه: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=3-3=0$

إذن: $(L)\perp(AB)$

ج) نعتبر K منتصف $[AB]$ ، إذن : $K\left(\frac{2+(-1)}{2};\frac{2+1}{2}\right)$ أي : $K\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

بما أن : $3x_K+y_K-3=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3=0$ فإن : $K\in(L)$ بالتالي (L) هو واسط القطعة $[AB]$

- لإيجاد إحداثيتي نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظمة المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين
- مسقط نقطة على مستقيم هي نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستقيم المار بالنقطة و العمودي على هذا المستقيم.
- لإيجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولا إحداثيتي منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيما مارا بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه . . .
- لكن للبرهان أن مستقيما معرف بمعادلة ديكارتية هو واسط قطعة نبين أنه متجهته الموجهة متعامدة مع متجهة (القطعة) و أن إحداثيتي منتصف القطعة يحقق معادلته.
- يستحسن جعل معامل x موجبا في معادلة مستقيم و ذلك بضرب جميع المعاملات في -1

تمرين 2 : $A\left(1,2\sqrt{3}\right)$ و $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $C(1,0)$

1 لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-1\ ;-\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1\ ;-\sqrt{3}\right)$ إذن: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{1+3}=2$ و $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{1+3}=2$

$\overrightarrow{BA}\left(1\ ;\sqrt{3}\right)$ ، $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{1-3}{2\times2}=\frac{-1}{2}$

بما أن $AB=BC$ فإن ABC متساوي الساقين في النقطة B

- لو أننا حصلنا على $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}$ لاستنتجنا أن ABC متساوي الأضلاع لأننا سنكون قد حصلنا على

$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\equiv\frac{®}{3}[2®]$ أو $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\equiv\frac{-®}{3}[2®]$

2 ليكن (Δ) الارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC

إذن (Δ) يمر من B و عمودي على (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{AC}\left(0;-2\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BM}\left(x\ ;\ y-\sqrt{3}\right)$

$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow0\times x-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\ \Leftrightarrow\ y-\sqrt{3}=0$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ y-\sqrt{3}=0}$

3 ليكن E منتصف $[AB]$ ، إذن المتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC هو المستقيم (EC)

لنحدد إذن لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (EC) ، لدينا : $E\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ، لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1\ ;\ y)$ و $\overrightarrow{EC}\left(\frac{1}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M\in(EC)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{EC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y\\ \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)+\frac{1}{2}y=0$$

$$\Leftrightarrow-3\sqrt{3}(x-1)+y=0\Leftrightarrow-3\sqrt{3}\,x+y-3\sqrt{3}=0$$

بالتالي : $\boxed{(EC):\ 3\sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}=0}$

4 لنحدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC ، نعلم أن : $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\sqrt{3} \end{cases}$ منه: $\boxed{G\left(\dfrac{2}{3}\,;\sqrt{3}\right)}$

5 مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC}=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{2}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-1\,;-\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(0\,;-2\sqrt{3}\right)$

منه: $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\left|\begin{vmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ 0 & -2\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|}{2}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}}$

<u>طريقة 1</u> : لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)، لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.

لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1\,;\ y)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1\,;-\sqrt{3}\right)$

$$M\in(BC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BC}\right)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & y\\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1)-y=0\quad\Leftrightarrow -\sqrt{3}\,x-y+\sqrt{3}=0$$

منه : $\boxed{(BC):\ \sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0}$ بالتالي: $d(A;(BC))=\dfrac{\left|\sqrt{3}x_A+y_A-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}$

<u>طريقة 2</u> : لتكن H هي المسقط العمودي لـ A على (BC) فإن: $S_{ABC}=\dfrac{AH\times BC}{2}$

منه : $d(A,(BC))=AH=\dfrac{2\,S_{ABC}}{BC}=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{BC}$ منه : $\boxed{d(A,(BC))=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{BC}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}}$

<u>تمرين 3</u> : $A(-1,-5)$ و $B(5,-3)$ و $C(1,1)$

1 أ) لدينا : $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=36-4=32\neq 0$ إذن $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوى المتجهي g_2

ب) لدينا : $\overrightarrow{AB}=6\,\vec{i}+2\,\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC}=2\,\vec{i}+6\,\vec{j}$

منه : $-3\overrightarrow{AB}=-18\,\vec{i}-6\,\vec{j}$ و $-3\overrightarrow{AC}=-6\,\vec{i}-18\,\vec{j}$

منه : $\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}=-16\,\vec{i}$ و $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=-16\,\vec{j}$

أي : $\vec{i}=\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j}=\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AC}$

إذن: $\vec{u}=2\left(\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AC}\right)$ أي : $\vec{u}=\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{16}\overrightarrow{AC}$

بالتالي إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ في الأساس $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ هي : $\left(\dfrac{3}{16},\dfrac{7}{16}\right)$

إيجاد إحداثيتي $\vec{u}$ في الأساس $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ يعني إيجاد زوج (a,b) يحقق : $\vec{u}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$

لذلك قمنا بالبحث عن تعبير كل من $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بطريقة تشبه طريقة حل نظمة

2 لتكن K منتصف $[BC]$ إذن : $K(3;-1)$

أ) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.لدينا : $\overrightarrow{KM}(x-3\,;\ y+1)$ و $\overrightarrow{BC}(-4\,;4)$

$$M\in(BC)\Leftrightarrow \overrightarrow{KM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow -4(x-3)+4(y+1)=0\ \Leftrightarrow -(x-3)+y+1=0\quad\Leftrightarrow -x+y+4=0$$

بالتالي : $(D):\ x-y-4=0$

ب) لدينا : $x_A - y_A - 4 = -1+5-4=0 \Rightarrow A\in(D)$

ج) بما أن $A\in(D)$ و (D) واسط $[BC]$ فإن: $AC=AB$ بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين في A

3

$$\sin\sim = \sin\left(B\hat{A}C\right) = \left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \left|\frac{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{AB\times AC}\right| = \left|\frac{32}{\sqrt{40}\times\sqrt{40}}\right| = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

يجب أن نميز بين الزاوية الهندسية و التي قياسها دائما عدد موجب و الزاوية الموجهة (الجبرية) و التي يمكن أن يكون قياسها سالبا أو موجبا.

4

أولا سنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى،لدينا : $\overrightarrow{BM}(x-5;\ y+3)$ و $\overrightarrow{AC}(2;6)$

$$M\in(\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow 2(x-5)+6(y+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)+3(y+3)=0 \Leftrightarrow x+3y+6=0$$

الآن لدينا التمثيل البارامتري للمستقيم (AC) هو : $(AC):\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+6t \end{cases} /t\in IR$

إذ إحداثيتي H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) هي حل النظمة : $\begin{cases} x+3y+6=0 \\ x=1+2t \\ y=1+6t \end{cases}$

منه $(1+2t)+3(1+6t)+6=0$: منه $20t+10=0$: منه $t=\frac{-1}{2}$ بالتالي : $\begin{cases} x_H = 1-1=0 \\ y_H = 1-3=-2 \end{cases}$ أي : $H(0;-2)$

فكرة السؤال سبق إدراجها في التمرين الأول 2 ب)، لكن هذه المرة فضلنا إدراج التمثيل البارامتري عوض معادلة ديكارتية لأنه يجعل النظمة أسهل

للتذكير التمثيل البارامتري لمستقيم مار من نقطة $A(x_A;y_A)$ و موجه بـ $\vec{u}(a;b)$ هو: $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \end{cases} /t\in IR$

يجب التمعن جيدا في هذه الطريقة فهي فعالة و تمكن من تحديد إحداثيتي المسقط العمودي لنقطة على مستقيم بسهولة.

تمرين 4 :

$A(1,-2)$ و $B(-1,3)$ و $C(-1,0)$

1

لدينا :

$$AM=BM \Leftrightarrow AM^2=BM^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$$

$$AM=BM \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-6y+9$$

$$AM=BM \Leftrightarrow -4x+10y-5=0 \Leftrightarrow 4x-10y+5=0$$

بالتالي (Γ_1) هي المستقيم ذو المعادلة : $4x-10y+5=0$

2

$$AM^2+BM^2=CM^2+OM^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(x+1)^2+(y-3)^2=(x+1)^2+y^2+x^2+y^2$$

$$AM^2+BM^2=CM^2+OM^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4+y^2-6y+9=2y^2+x^2$$

$$AM^2+BM^2=CM^2+OM^2 \Leftrightarrow -2x-2y+14=0 \Leftrightarrow x+y-7=0$$

بالتالي (Γ_2) هي المستقيم ذو المعادلة : $x+y-7=0$

3

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow (x+1)(x+1)+(y-3)y=(1-x)(0-x)+(-2-y)(0-y)$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-3y=-x+x^2+2y+y^2$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow 3x-5y+1=0$$

بالتالي (Γ_3) هي المستقيم ذو المعادلة : $3x-5y+1=0$

	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)+(y+2)(y-3)=(x+1)^2+y^2$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2 \Leftrightarrow x^2-1+y^2-y-6=x^2+2x+1+y^2$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2 \Leftrightarrow 2x+y+8=0$ بالتالي (Γ_4) هي المستقيم ذو المعادلة : $2x+y+8=0$	4
	تمرين5 : $A(1,-2)$ ، (Δ): $2x+y-3=0$	
	لتكن H المسقط العمودي لـ A على المستقيم (Δ) وليكن (L) المستقيم المار من A و العمودي على (Δ) المتجهة $\vec{u}(2;1)$ المنظمية على (Δ) هي موجهة لـ (L) إذن التمثيل البارامتري لـ (L) هو : $/t\in IR$ $(L):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+t\end{cases}$ إذ إحداتيثي H هي حل النظمة : $\begin{cases}2x+y-3=0\\ x=1+2t\\ y=-2+t\end{cases}$ منه $2(1+2t)+(-2+t)-3=0$ منه : $5t-3=0$ منه : $t=\frac{3}{5}$ بالتالي : $\begin{cases}x_H=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}\\ y_H=-2+\frac{3}{5}=\frac{-7}{5}\end{cases}$ أي : $H\left(\frac{11}{5};\frac{-7}{5}\right)$ الآن A' هي مماثلة A بالنسبة للنقطة H أي أن H منتصف $[AA']$ منه : $\begin{cases}x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\\ y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=\frac{22}{5}-1=\frac{17}{5}\\ y_{A'}=2y_H-y_A=\frac{-14}{5}+2=\frac{-4}{5}\end{cases}$ بالتالي : $\boxed{A'\left(\frac{17}{5};\frac{-4}{5}\right)}$	